



Auxiliar 9

Miercoles 22 de Abril de 2009

Pregunta 1

Suponga que la número de goles que marca un equipo de fútbol puede ser descrito por un proceso de Poisson. Considere los siguientes equipos (procesos independientes) :

A : tasa λ_A goles/partido

B: tasa λ_B goles/partido

1. Si se enfrentan A y B ¿Cuál es la probabilidad de que A gane 2 x 1 ?
2. Suponga que ha transcurrido el primer tiempo entre A y B, si se sabe que A va ganando 2 x 0, ¿cuál es la probabilidad de que el primer gol haya sido antes de 15 min. y el segundo antes de 30 min.?
3. Va a comenzar el segundo tiempo (A va ganando 2 x 0), ¿cuál es la probabilidad de que A marque 3 goles antes de los 30 min. (sin importar lo que pase con B)?.
4. Suponga que el partido en su tiempo reglamentario (90 min.) quedó igualado 3 x 3. Sin embargo, es necesario definir el ganador, para ello se utilizará la modalidad "golden goal", es decir, el primero que marca el gol gana. ¿Cuál es la probabilidad de que el partido se prolongue por más de 45 minutos?.
5. Asuma que ahora se cambian las reglas a "two golden goals", es decir, el primer equipo que marca 2 goles consecutivos gana ¿Cuál es la probabilidad de que gane B?.

Problema 2

Partiendo en $t = 0$, los buses llegan a un paradero según un proceso de poisson de tasa λ . Por su parte, lo pasajeros llegan a esperar al paradero según un proceso de poisson de tas μ . Al llegar el bus, todos los pasajeros que se encuentren esperando se suben instantáneamente a él (i.e. capacidad del bus es infinita), y los pasajeros que llegan posteriormente a esperar se suben al siguiente bus.

1. Encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que entran al m-ésimo bus, dado que el tiempo entre las llegadas del bus $m - 1$ y del bus m-ésimo es t .
2. Encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que se suben al m-ésimo bus.
3. Dado que un bus llega a las 10:30 AM y no llegan buses entre las 10:30 y las 11:00 AM, encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que se suben al siguiente bus.

Problema 3

Los votantes en la elección municipal llegan a un determinado local de votación según un proceso de Poisson de tasa λ . Cada votante, independiente de todo lo demás, vota con probabilidad 0.5 por el candidato A y con probabilidad 0.5 por el candidato B. Suponga que la votación comienza en $t=0$ y dura indefinidamente

1. Condicional en que votaron 1000 personas durante las primeras 10 horas, ¿cuál es la probabilidad que el candidato A reciba n de estos votos?.
2. Nuevamente condicional en que votaron 1000 personas durante las primeras 10 horas, encuentre la probabilidad que el candidato A reciba n votos en las primeras 4 horas de votación.

3. Sea T el instante de la llegada del primer votante por A. Encuentre la densidad de A. Encuentre la función de probabilidad del número de votantes por B que llegan antes del primer votante por A.
4. Defina el n -ésimo votante como una inversión si este vota distinto que el $(n-1)$ -ésimo. Por ejemplo, en la secuencia AABAABB, el tercer, cuarto y sexto votantes son inversiones. Encuentre la densidad de probabilidad del tiempo entre inversiones.¹

¹HINT: Deduzca la probabilidad que una llegada cualquiera produzca una inversión. Con ello deduzca el proceso de conteo de inversiones y encuentre la densidad de tiempo entre estos eventos.