



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: J. Correa, R. Epstein
Aux: Astroza, Gacitúa, Lagos, Thraves

Clase Auxilliary 8, 21 de Abril de 2008

Procesos de Poisson

Problema 1

1. Como los meses son intervalos disjuntos de tiempo estas probabilidades son independientes. La esperanza del número de fallas será $30 \cdot (\lambda_D + \lambda_A)$ en 1 mes.
2. Esta es la típica pregunta tipo “¿Cuál es la probabilidad que pase A antes de B?”. Si T_D = tiempo en que ocurre la primera falla domiciliaria y T_A = tiempo en que ocurre la primera falla de alumbrado público sabemos que $T_D \rightsquigarrow \exp(\lambda_D)$ y $T_A \rightsquigarrow \exp(\lambda_A)$

$$P(T_D < T_A) = \frac{\lambda_D}{\lambda_D + \lambda_A}$$

3. Una manera de verlo es darse cuenta que los 3 procesos involucrados son independientes, y proceder a calcular directamente la esperanza. Otra manera es calcular la esperanzas de las fallas condicionado al tiempo que dure la reparación y luego calcular lo que nos piden. Si T_r es el tiempo que dura la reparación en meses:

$$\begin{aligned} E[\text{N fallas Domiciliarias}/T_r = t] &= \lambda_D \cdot \frac{t}{24} \\ \Rightarrow E[\text{N fallas Domiciliarias}] &= \int_0^\infty \frac{\lambda_D \cdot t}{24} \cdot \frac{1}{T} \exp^{-\frac{1}{T} \cdot t} dt = \frac{\lambda_D}{24} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{T} \cdot t \cdot \exp^{-\frac{1}{T} \cdot t} dt \\ \Rightarrow E[\text{N fallas Domiciliarias}] &= \frac{\lambda_D \cdot T}{24} \\ \Rightarrow E[\text{N fallas Alumbrado público}] &= \frac{\lambda_A \cdot T}{24} \end{aligned}$$

4. En este caso los costos están divididos en 2 tramos: Si N_A = Número de fallas de Alumbrado público son menores que R se pagará $s_1 \cdot R$, mientras que si $N_A > R$ se pagará $s_1 \cdot R + s_2 \cdot (N_A - R)$. Así el problema de minimización queda:

$$\begin{aligned} \min_R \left\{ s_1 \cdot R \cdot P(N_A \leq R) + \sum_{k=R+1}^{\infty} [s_1 \cdot R + s_2 \cdot (k - R)] \cdot P(N_A = k) \right\} \\ \min_R \left\{ s_1 \cdot R + \sum_{k=R+1}^{\infty} s_2 \cdot (k - R) \cdot \frac{(\lambda_A \cdot 30)^k \exp^{-\lambda_A \cdot 30}}{k!} \right\} \end{aligned}$$

Problema 2

1. Para que esto ocurra el tiempo entre cada uno de los 6 últimos 6 goles debe ser superior a B (notar que la probabilidad de ver el primer gol es 1). Sean x_i = tiempo entre el gol (i-1)-ésimo y el i-ésimo. Entonces:

$$P(\text{ver los 7 primeros goles}) = P(x_2 > B, x_3 > B, \dots, x_6 > B, x_7 > B) = (e^{-\lambda B})^6 = e^{-6\lambda B}$$

2. Sea Y_i el tiempo trascurrido entre el fin de la celebración del (i-1)-ésimo gol observado y el momento en que se produce el i-ésimo gol observado. De esta manera tenemos que:

- $Y_1 \rightarrow \exp(\lambda)$
- $Y_i \rightarrow \exp(\lambda) \forall i \neq 1$

Entonces sea S_N el tiempo en que vemos el N-ésimo gol.

$$S_n = \sum_{i=1}^N Y_i + (N-1)B \Rightarrow S_N - (N-1)B \rightarrow \text{Gamma}(N, \lambda)$$

De lo anterior, y sabiendo que $P(S_N \leq t) = P(R(T) \geq N)$ ¹ se concluye que:

$$P(R(T) \geq N) = \int_0^{t-(n-1)B} \frac{\lambda^N \cdot t^{N-1} \cdot e^{-\lambda t} \partial t}{(N-1)!}$$

Problema 3

1. Dado que el proceso es poissoniano \Rightarrow Tiempo entre llegadas $\rightarrow \exp(\lambda)$.
Por lo tanto:

$$P_s(\text{caminar}) = \int_s^\infty \lambda e^{-\lambda t} \partial t = e^{-\lambda s}$$

2. Hay que distinguir dos casos:

- Si el bus pasa en t , con $t \leq s$, me demoro $t+R$ en llegar a casa.
- Si el bus pasa en t , con $t > s$, me demoro $s+W$ en llegar a casa.

3. Para calcular esta esperanza condicionaremos sobre t , el instante de llegada del bus.

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_0^\infty E(T|t) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t \\ E(T) &= \int_0^s (t+R) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t + \int_s^\infty (S+W) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t \end{aligned}$$

Desarrollando deberían llegar a la siguiente expresión:

$$E(T) = R + \frac{1}{\lambda} + e^{-\lambda s} (W - R - \frac{1}{\lambda})$$

4. Claramente si:

- $W - R - \frac{1}{\lambda} > 0$, entonces $E(T)$ se minimiza en $s = \infty$
- $W - R - \frac{1}{\lambda} < 0$, entonces $E(T)$ se minimiza en $s=0$
- $W - R - \frac{1}{\lambda} = 0$, entonces la expresión no depende de s .

5. Dada la pérdida de memoria de la exponencial, si espero un $s>0$ y cada vez que pasa ese tiempo reevalúo mi decisión estaré siempre frente al mismo problema original por lo que mi s será el mismo \Rightarrow si $s>0$, entonces $s=\infty$.

¹Identidad válida para cualquier proceso de conteo