

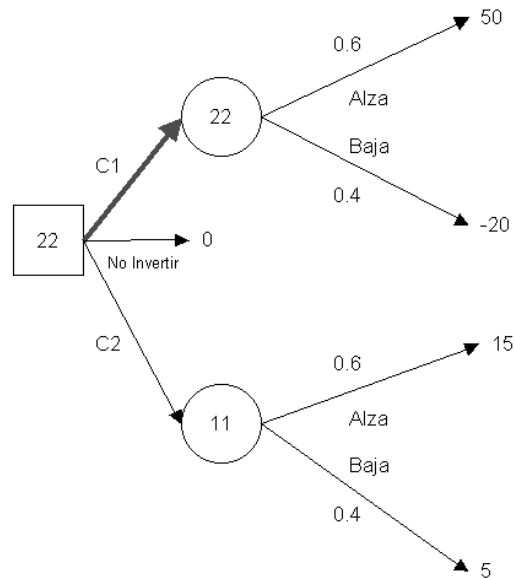


Pauta Auxiliar 7

Miercoles 15 de Abril de 2009

Pregunta 1

1. Para determinar la política óptima de inversión se debe resolver el siguiente árbol:



Luego se obtiene que la política óptima es invertir en C_1 , con un valor esperado de los beneficios de 22M\$.

2. Definamos los siguiente eventos:

- OPT: Amigo optimista y opina que el mercado está al alza.
- PES: Amigo pesimista y opina que el mercado está a la baja.
- A: Mercado a la alza
- B: Mercado a la baja

Según los datos del enunciado sabemos que:

$$P(\text{OPT}/A) = 0,9$$

$$P(\text{OPT}/B) = 0,5$$

$$P(\text{PES}/A) = 0,1$$

$$P(\text{PES}/B) = 0,5$$

Se deben calcular las siguientes probabilidades:

$$P(\text{OPT}) = P(\text{OPT}/A)P(A) + P(\text{OPT}/B)P(B) = (0,9 \cdot 0,6) + (0,5 \cdot 0,4) = 0,74$$

$$P(\text{PES}) = P(\text{PES}/A)P(A) + P(\text{PES}/B)P(B) = (0,1 \cdot 0,6) + (0,5 \cdot 0,4) = 0,26$$

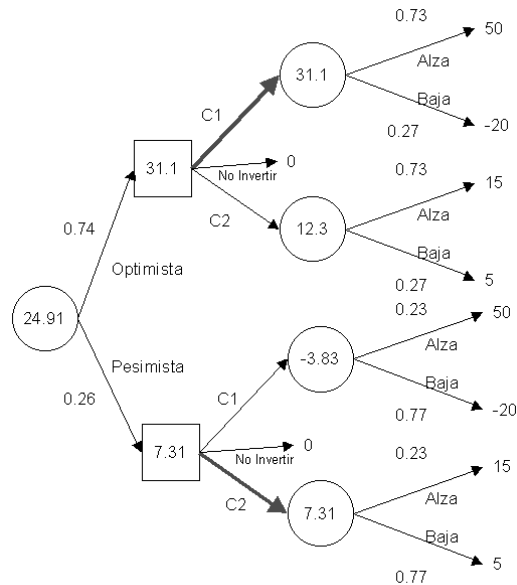
$$P(A/\text{OPT}) = \frac{P(\text{OPT}/A)P(A)}{P(\text{OPT})} = \frac{0,54}{0,74} = 0,730$$

$$P(B/\text{OPT}) = \frac{P(\text{OPT}/B)P(B)}{P(\text{OPT})} = \frac{0,20}{0,74} = 0,270$$

$$P(A/\text{PES}) = \frac{P(\text{PES}/A)P(A)}{P(\text{PES})} = \frac{0,06}{0,26} = 0,231$$

$$P(B/\text{PES}) = \frac{P(\text{PES}/B)P(B)}{P(\text{PES})} = \frac{0,20}{0,26} = 0,769$$

Luego, con la nueva información, la situación se resume en el siguiente árbol:



Luego lo máximo que estaría dispuesto a pagar por la información es :

$$VE(\text{Info}) = 24,91 - 22 = 2,91$$

3. Para el de un Test de Información Perfecta definamos la siguiente notación adicional:

- TA: Test predice alza.
- TB: Test predice baja.

Luego se tiene que:

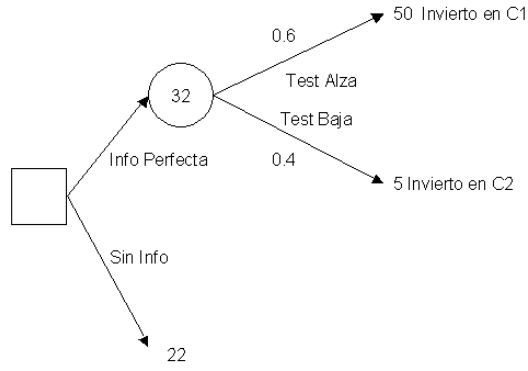
$$P(A/\text{TA}) = 1$$

$$P(B/\text{TB}) = 1$$

$$P(\text{TA}) = 0,6$$

$$P(\text{TB}) = 0,4$$

Y el árbol correspondiente queda como sigue:



Luego el Valor esperado de la Información Perfecta es:

$$VEIP = 32 - 22 = 10$$

Problema 2

1. El modelo queda como sigue:

■ Etapas de decisión

Cada período: $k = 1, 2, \dots, K$.

■ Variables de decisión

- u_k : cantidad de unidades a pedir en el período k ($u_k \geq 0$, entero);
- p_k : cantidad de paquetes a armar en el período k ($0 \leq p_k \leq \left\lfloor \frac{v_k + u_k}{N} \right\rfloor$, entero).

■ Variables de estado

- v_k : cantidad de unidades en inventario al inicio del período k ;
- q_k : cantidad de paquetes en inventario al inicio del período k .

■ Variables aleatorias

- d_k : demanda en el período k (número de paquetes).

■ Funciones de recurrencia

- $v_{k+1} = v_k + u_k - Np_k$;
- $q_{k+1} = \max\{q_k + p_k - d_k, 0\}$.

■ Funciones de beneficio

$$\begin{aligned}
 E(V_k(v_k, q_k, u_k, p_k)) &= -(c_k u_k + I_k v_k + J_k q_k) \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{ik} \cdot \left[Z \min\{i, q_k + p_k\} \right. \\
 &\quad \left. + V_{k+1}^*(v_k + u_k - Np_k, \max\{q_k + p_k - i, 0\}) \right].
 \end{aligned}$$

donde:

$$V_k^*(v_k, q_k) = \max_{u_k, p_k} \{E(V_k(v_k, q_k, u_k, p_k))\}$$

▪ **Condiciones de borde**

$$v_1 = q_1 = 0, \quad V_{K+1}^*(v_{K+1}, q_{K+1}) = r \cdot v_{K+1} + R \cdot q_{K+1}.$$

2. Las etapas de decisión siguen siendo las mismas. Hay que agregar las siguientes variables:

▪ **Variables de estado**

- m_k : unidades que adeuda el fabricante al inicio del período k , por reemplazo de unidades defectuosas enviadas en el período $k - 1$.

▪ **Variables aleatorias**

- f_k : cantidad de unidades defectuosas en el período k .

Además hay que modificar las recurrencias y funciones de beneficio de la siguiente manera:

▪ **Funciones de recurrencia**

- $v_{k+1} = v_k + (u_k - f_k) + m_k - Np_k$;
- $m_{k+1} = f_k$.

Obs. La recurrencia para q_k no se modifica.

▪ **Funciones de beneficio**

$$\begin{aligned} E(V_k(v_k, q_k, m_k, u_k, p_k)) &= -(c_k u_k + I_k v_k + J_k q_k) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{ik} \cdot \left[Z \min\{i, q_k + p_k\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{u_k} \alpha_{u_k, j} \cdot V_{k+1}^*(v_k + u_k - j + m_k - Np_k, \max\{q_k + p_k - i, 0\}, j) \right]. \end{aligned}$$

donde:

$$V_k^*(v_k, q_k, m_k) = \max_{u_k, p_k} \{E(V_k(v_k, q_k, m_k, u_k, p_k))\}$$

Pregunta 3

1. Supondremos que $P_2 < C_1$ (si no la decisión es trivial), con lo que solo analizamos el caso $X < D$. Si la demanda t es menor a la cantidad ordenada X , las utilidades toman la siguiente forma:

$$Utilidad = t \cdot P_1 - X \cdot C_1 + (X - t) \cdot P_2$$

2. Si la demanda t es mayor a la cantidad ordenada X , las utilidades toman la siguiente forma:

$$Ganancia = X \cdot P_1 - (t - X) \cdot C_2 - X \cdot C_1$$

3. Para obtener la ganancia diaria esperada simplemente integramos la función de utilidad condicionada sobre todo el dominio de función la demanda ponderando por la densidad de probabilidad. Esto es:

$$\begin{aligned} E[Utilidad] &= \int_0^D E[Utilidad | t] \cdot \frac{dt}{D} \\ &= \int_0^X E[Utilidad | t] \cdot \frac{dt}{D} + \int_X^D E[Utilidad | t] \cdot \frac{dt}{D} \\ &= \int_0^X [t \cdot P_1 - C_1 \cdot X + (X - t) \cdot P_2] \cdot \frac{dt}{D} + \int_X^D [X \cdot P_1 - C_1 \cdot X - (t - X) \cdot C_2] \cdot \frac{dt}{D} \\ &= \frac{X^2}{2D} \cdot P_1 + \frac{X^2}{D} \cdot P_2 - \frac{X^2}{2D} \cdot P_2 + \frac{X \cdot (D - X)}{D} \cdot P_1 - \frac{D}{2} \cdot C_2 + \frac{X^2}{2D} \cdot C_2 \\ &\quad + \frac{X \cdot (D - X)}{D} \cdot C_2 - X \cdot C_1 \end{aligned}$$

4. Derivamos e igualamos a 0.

$$\frac{X}{D} \cdot P_1 + P_1 + \frac{X}{D} \cdot P_2 - \frac{2 \cdot X}{D} \cdot P_1 + \frac{X}{D} \cdot C_2 + C_2 - \frac{2X}{D} \cdot C_2 - C_1 = 0$$

Entonces, despejando:

$$X = D \cdot \left(1 - \frac{C_1 + P_2}{P_1 - P_2 + C_2}\right)$$

5. Procedemos de la misma forma. Consideremos Consideremos a I^* tal que:

$$I^* = \min\left\{D_B, \frac{X_A + X_B \cdot q}{q}\right\}$$

Este número nos indica cuando la demanda por la poción B y por la poción A es cubierta tan solo con la demanda del producto B

$$\begin{aligned} E[\text{Utilidad}] &= \int_0^{D_B} E[\text{Utilidad}|i] \cdot \frac{di}{D_B} \\ &= \int_0^{X_B} E[\text{Utilidad}|i] \cdot \frac{di}{D_B} + \int_{X_B}^{I^*} E[\text{Utilidad}|i] \cdot \frac{di}{D_B} + \int_{I^*}^{D_B} E[\text{Utilidad}|i] \cdot \frac{di}{D_B} \end{aligned}$$

Si $X_B > i$:

$$\begin{aligned} E[\text{Utilidad}|i] &= -C_{1B} \cdot X_B + P_{1B} \cdot i + P_{2B} \cdot (X_B - i) - C_{1A} \cdot X_A + \int_0^{X_A} [t \cdot P_{1A} + (X_A - t) \cdot P_{2A}] \cdot \frac{dt}{D_A} \\ &\quad + \int_{X_A}^{D_A} [X_A \cdot P_{1A} - (t - X_A) \cdot C_{2A}] \cdot \frac{dt}{D_A} \end{aligned}$$

Si $X_B < i < I^*$:

$$\begin{aligned} E[\text{Utilidad}|i] &= -C_{1B} \cdot X_B + P_{1B} \cdot X_B + P_{1A} \cdot q \cdot (i - X_B) - C_{1A} \cdot X_A \\ &\quad + \int_0^{X_A - q \cdot (i - X_B)} [t \cdot P_{1A} + (X_A + q \cdot (i - X_B) - t) \cdot P_{2A}] \cdot \frac{dt}{D_A} \\ &\quad + \int_{X_A - q \cdot (i - X_B)}^{D_A} [(X_A - q \cdot (i - X_B)) \cdot P_{1A} - (t - X_A + q \cdot (i - X_B)) \cdot C_{2A}] \cdot \frac{dt}{D_A} \end{aligned}$$

Finalmente, si $i > I^*$

$$\begin{aligned} E[\text{Utilidad}|i] &= -C_{1B} \cdot X_B - C_{1A} \cdot X_A + P_{1B} \cdot X_B + X_A \cdot P_{1A} \\ &\quad - (i - I^*) \cdot C_{2A} + C_{2A} \cdot \frac{D_2}{2} \end{aligned}$$

Implicítamente hemos supuesto que $X_B < D_B$, que $X_A < (D_B - X_B) \cdot q$ y que $X_A + X_B < D_A + D_B$. Integrando estas expresiones (y diferenciando rangos en los que I^* menor o igual a D_B) se obtiene una expresión para las utilidades en función de X_A y X_B . Luego derivamos ambas expresiones respecto a las variables de decisión, igualamos a 0 y comprobamos que corresponden a los intervalos relevantes