



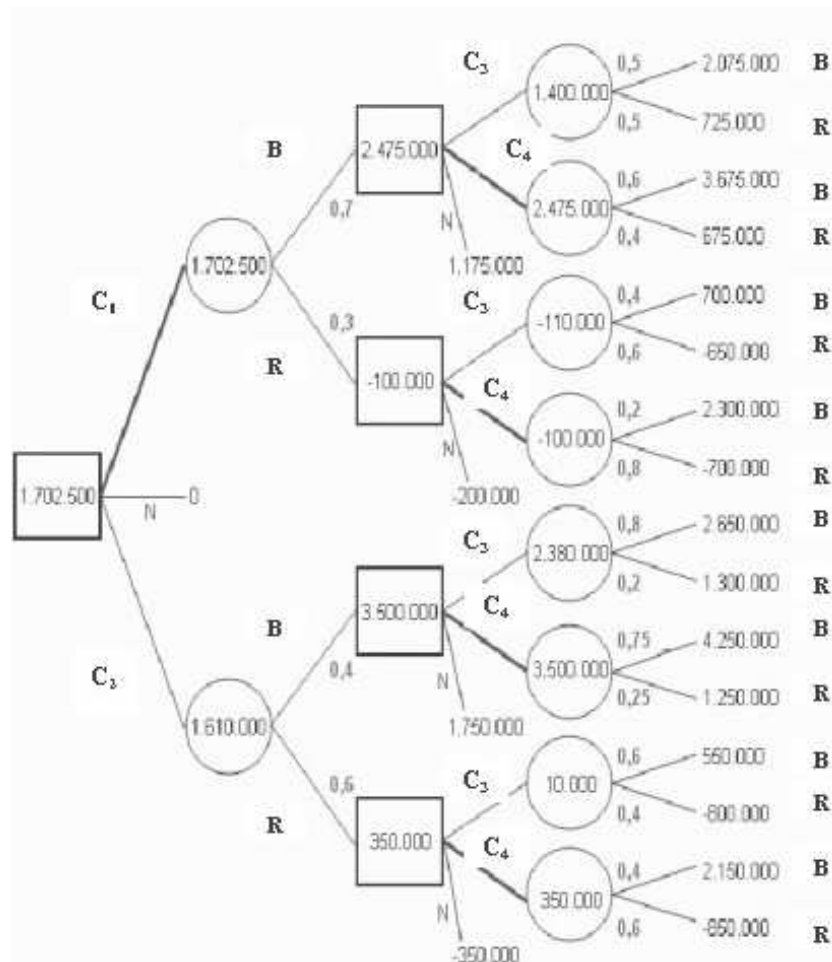
Solución Control 1 1 de Septiembre de 2006

Problema 1

- La cantidad de quesos que la empresa vende en el país C_i , condicionado en que llueve en dicho país, sigue una distribución binomial de parámetros N_i y q_i , luego:

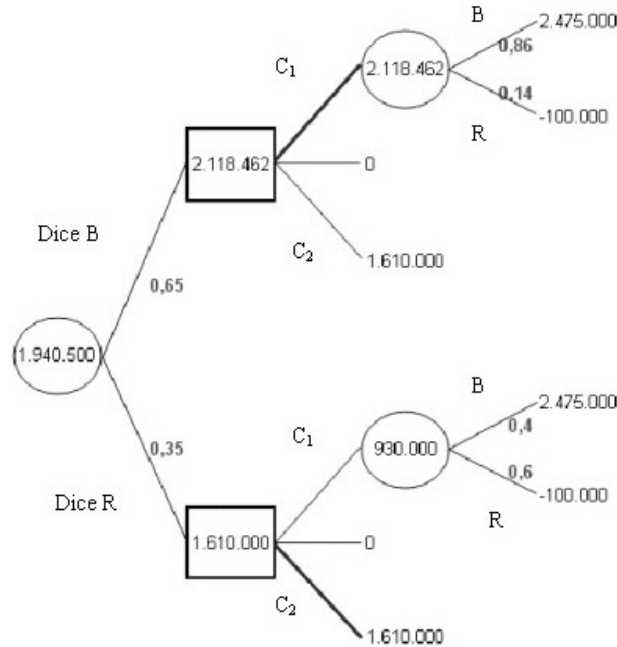
$$\begin{aligned} E[\text{Quesos vendidos en } C_1 \mid C_1 \text{ bien económicamente}] &= N_1 q_1 = 0,55 \times 1.000 = 550, \\ E[\text{Quesos vendidos en } C_2 \mid C_2 \text{ bien económicamente}] &= N_2 q_2 = 0,7 \times 2.000 = 1.400, \\ E[\text{Quesos vendidos en } C_3 \mid C_3 \text{ bien económicamente}] &= N_3 q_3 = 0,9 \times 500 = 450, \\ E[\text{Quesos vendidos en } C_4 \mid C_4 \text{ bien económicamente}] &= N_4 q_4 = 0,2 \times 10.000 = 2.000, \end{aligned}$$

- El árbol asociado a este problema se muestra en la figura



Luego la estrategia óptima es: Ir en la primera etapa al país C_1 , y luego ir a C_4 sin importar si C_1 está bien económicamente o no.

3. En esta parte, el economista sólo ofrece opinar sobre el estado del tiempo del país C_1 , por lo que las ramas asociadas a ir a los países C_2 en la primera etapa y a C_3 y C_4 en la segunda etapa no varían respecto a la situación base, es decir, son las mismas que las del árbol de la parte anterior. Esto simplifica considerablemente el problema y el árbol asociado es el que se muestra en la figura



De esta forma, si el economista dice que C_1 se encuentra bien, la empresa debe dirigirse al país C_1 , y si éste efectivamente se encuentra bien, dirigirse a C_4 , si no, concluir el negocio. Mientras que si el economista dice que hay recesión en C_1 , la empresa debe dirigirse primero a C_2 para luego, sin importar como está la economía, dirigirse a C_4 .

La disposición a pagar es $\$1.940.500 - \$1.702.500 = \$238.000$

Se debe, para esto, calcular las probabilidades asociadas a la predicción del economista y al estado económico de C_1 condicionadas a la predicción.

Definiendo:

D_B : Dice que C_1 está bien.

D_R : Dice recesión en C_1 .

B : C_1 está bien.

R : C_1 en recesión.

Del enunciado se conocen

$$\begin{aligned} P[D_B|B] &= 0,8 = 1 - P[D_R|B], \\ P[D_R|R] &= 0,7 = 1 - P[D_B|R]. \end{aligned}$$

Calculando primero $P[D_B]$:

$$\begin{aligned} P[D_B] &= P[D_B|B] \times P[B] + P[D_B|R] \times P[R], \\ &= 0,8 \times 0,7 + 0,3 \times 0,3, \\ &= 0,65, \end{aligned}$$

tenemos que $P[D_R] = 0,35$.

Las probabilidades condicionales que se requieren para calcular el árbol se obtienen utilizando el teorema de Bayes:

$$P[B|D_B] = \frac{P[D_B|B]P[B]}{P[D_B]} = \frac{0,8 \times 0,7}{0,65} = 0,86$$

y $P[R|D_B] = 0,14$. De la misma manera,

$$P[B|D_R] = \frac{P[D_R|B]P[B]}{P[D_R]} = \frac{0,2 \times 0,7}{0,35} = 0,4$$

y $P[R|D_R] = 0,6$.

4. En esta última parte se cuenta con los siguientes datos:

$$\begin{aligned} P[M|D_B] &= 0,95 \\ P[B|D_R] &= 0,95 \end{aligned}$$

Se necesita calcular $P[D_B]$ y $P[D_R]$. Estos valores pueden obtenerse resolviendo el sistema de ecuaciones:

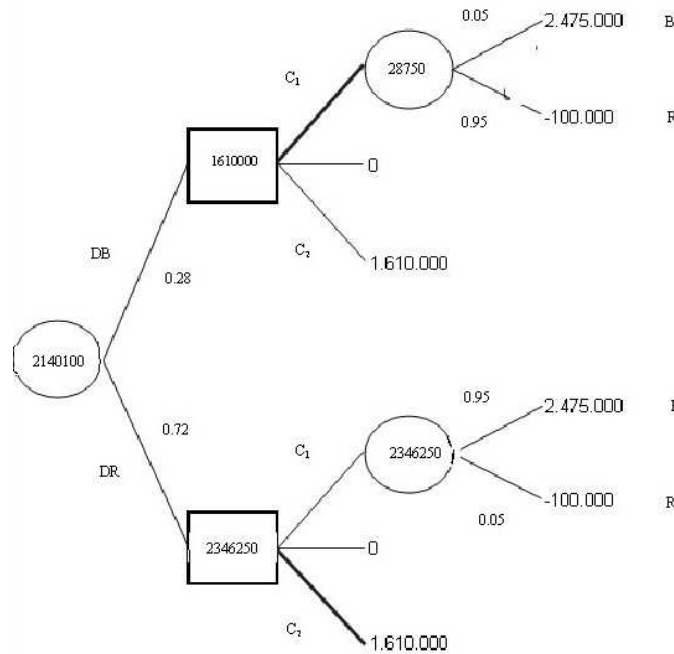
$$\begin{aligned} P[B] &= P[B|D_B] \times P[D_B] + P[B|D_R] \times P[D_R] \\ P[R] &= P[R|D_B] \times P[D_B] + P[R|D_R] \times P[D_R] \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned} 0,7 &= 0,05 P[D_B] + 0,95 P[D_R] \\ 0,3 &= 0,95 P[D_B] + 0,05 P[D_R] \end{aligned}$$

La solución a este sistema es $P[D_B] = 0,28$ y $P[D_R] = 0,72$.

El árbol se muestra a continuación



El economista predice tan mal que su información es más útil para la empresa que el buen economista. Si dice que la economía de C_1 está bien, la empresa debe vender en C_2 y sólo se debe ir a C_1 cuando dice que la economía sufre una recesión. Luego la empresa tiene una mayor disposición a pagar, la cual es de $\$2.140.100 - \$1.702.500 = \$437.600$

Problema 2

1. Un modelo que cumple con lo solicitado es el siguiente:

Etapas

Cada año: $i = 1, \dots, n$.

Variables de estado

- s_i : cantidad de ovejas en el rebaño del año i ;

Variables de decisión

- e_i : cantidad de ovejas a vender al final del año i .

Funciones de recurrencia

Las variables de estado se actualizan de acuerdo a las siguientes relaciones:

$$s_{i+1} = 2(s_i - e_i).$$

Función de beneficio

$$V_i(s_i, e_i) = u_i e_i - c_i(s_i - e_i) + V_{i+1}^*(2(s_i - e_i)) = (u_i + c_i)e_i - c_i s_i + V_{i+1}^*(2(s_i - e_i)),$$

donde

$$V_i^*(s_i) = \max\{V_t(s_i, e_i) : 0 \leq e_i \leq s_i\}.$$

Condiciones de borde

- $s_i = k$;
- $V_{n+1}^*(s_{n+1}) = 0$.

2. Para resolver el caso propuesto planteamos las siguientes tablas:

Año 3

| s_3 | e_3 | | | | | V_3^* | e_3^* |
|-------|-------|-----|-----|-----|-----|---------|---------|
| | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | | |
| 0 | 0 | | | | | 0 | 0 |
| 2 | | 240 | | | | 2 | 240 |
| 4 | | | 480 | | | 4 | 480 |
| 6 | | | | 720 | | 6 | 720 |
| 8 | | | | | 960 | 8 | 960 |

De acuerdo al enunciado, en el último año el campesino vende el rebaño completo.

Año 2

| | e_2 | | | | | | |
|-------|-------|-----|-----|-----|-----|---------|---------|
| s_2 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | V_2^* | e_2^* |
| 0 | 0 | | | | | | 0 |
| 2 | 180 | 220 | 260 | | | 260 | 2 |
| 4 | 360 | 400 | 440 | 480 | 520 | 520 | 4 |

Las casillas en blanco en la tabla corresponden a decisiones que no son posibles.

Año 1

| | e_1 | | | | |
|-------|-------|-----|-----|---------|---------|
| s_1 | 0 | 1 | 2 | V_1^* | e_1^* |
| 2 | 320 | 260 | 200 | 320 | 0 |

La estrategia óptima es entonces, no vender nada el primer año y vender el rebaño completo al final del segundo.

Problema 3

- Según el enunciado, el precio para el período t es una función que depende de los siguientes parámetros: del inventario en la tienda $I(t)$, del inventario en tránsito $q(t-1)$, del tiempo hasta el final de la temporada $T-t$, el precio de la semana anterior $P(t-1)$ y las ventas acumuladas $va(t) = \sum_{s=1}^{t-1} v(s)^\dagger$. Además sabemos que el precio varía entre un precio mínimo de \$ 300 y un precio de lista (máximo) de \$ 1.000. Sin más información podemos suponer que el precio inicial es igual al precio de lista, es decir $P(1) = 1.000$ y para las siguientes semanas usar, por ejemplo, una función de la forma

$$F(I(t), q(t-1), T-t, P(t-1), va(t)) = A \cdot I(t)^\alpha q(t-1)^\beta (T-t)^\gamma P(t-1)^\delta va(t)^\phi,$$

donde A es una constante de proporcionalidad y los exponentes α , β , γ , δ y ϕ indican la importancia o peso relativo en la determinación del precio: un exponente positivo implica que el precio sube si ese factor se incrementa y un exponente negativo significa que el incremento del factor correspondiente disminuye el precio.

Con esta función y las cotas indicadas, podemos definir el precio como:

$$P(t) = \begin{cases} 1.000 & \text{si } F(I(t), q(t-1), T-t, P(t-1), va(t)) \geq 1.000, \\ F(I(t), q(t-1), T-t, P(t-1), va(t)) & \text{si } 300 < F(I(t), q(t-1), T-t, P(t-1), va(t)) < 1.000, \\ 300 & \text{si } F(I(t), q(t-1), T-t, P(t-1), va(t)) \leq 300. \end{cases}$$

- Un modelo que cumple con lo solicitado es el siguiente:

Etapas

Cada fin de semana de la temporada: $t = 1, \dots, T$.

Variables de estado

- $I(t)$: cantidad de pares de zapatos en inventario al inicio del fin de semana t ;
- $P(t)$: precio de venta de un par de zapatos en la semana t ;

[†]Las variables $q(t)$ y $v(t)$ son definidas en el modelo del punto 2.

Variables de decisión

- $q(t)$: cantidad de pares de zapatos a pedir al inicio de la semana t ;

Variables aleatorias

- $v(t)$: número de clientes que desean comprar zapatos durante la semana t .

Esta variable aleatoria toma valores enteros no negativos. Denotamos por p_t a la probabilidad que un cliente que entra a la tienda en la semana t desee comprar los zapatos al precio $P(t)$ de esa semana, es decir $p_t = \exp(-(1 - 10/P(t)))$. Entonces, $v(t)$ tiene distribución dada por las probabilidades

$$P(v(t) = k) = \binom{N(t)}{k} (p_t)^k (1 - p_t)^{N(t)-k}.$$

Denotemos estas probabilidades como α_{tk} .

Funciones de recurrencia

La variable de estado de inventario en tienda se actualiza de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$I(t+1) = q(t) + \max\{I(t) - v(t), 0\}.$$

El precio $P(t+1)$ se actualiza de acuerdo a la función definida en la parte 1.

Función de beneficio

$$\begin{aligned} V_t(I(t), P(t), q(t)) &= E_{v(t)}[P(t) \min\{I(t), v(t)\} - Q \max\{v(t) - I(t), 0\} + V_{t+1}^*(I(t+1))] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{tk} [P(t) \min\{I(t), k\} - Q \max\{k - I(t), 0\} + V_{t+1}^*(q(t) + \max\{I(t) - k, 0\}, P(t+1))] \end{aligned}$$

donde

$$V_t^*(I(t), P(t)) = \max\{V_t(I(t), P(t), q(t)) : 0 \leq q(t)\}.$$

Condiciones de borde

- $I(1)$ conocido;
- $P(1) = 1.000$;
- $V_{T+1}^*(I(T+1)) = 10I(T+1)$.

3. Habría que agregar dos nuevas variable de estado, $x(t)$ que represente el pedido recibido esta semana e $y(t)$ que represente el pedido recibido la semana anterior .

Estas variables se actualizan de acuerdo a las recurrencias: $x(t+1) = q(t)$, $y(t+1) = x(t)$.

A la función de beneficio habría que agregarle los términos: $c(x(t)) + A(t)|x(t) - y(t)|$.