



Pauta Control 1 4 de Septiembre de 2008

Problema 1

Considere el siguiente juego: en una caja hay B bolas blancas, R bolas rojas y A bolas azules. El juego consiste en ir sacando de una bola de la caja, sin reponerlas, hasta que salga una bola azul o roja. Cuando esto sucede el juego termina.

El premio que se recibe depende tanto del color de la última bola como del número de bolas blancas que se sacaron.

Si se sacaron k bolas blancas y finalmente una azul, se recibe un premio de valor $X - k$. Si se sacaron k bolas blancas y finalmente una roja, se recibe un premio de valor $Y - k$. Dicho de otra manera, se recibe X si la última bola fue azul, se recibe Y si la última fue roja y al valor que corresponda hay que descontarle 1 por cada bola blanca que salió.

1. (1 punto) Calcule la probabilidad que el juego concluya luego de extraer exactamente k bolas blancas.

El juego se termina luego de extraer exactamente k blancas, si salen k bolas blancas y luego una roja o azul. Esto sucede con probabilidad 0 si k es mayor que B y con probabilidad

$$\frac{B}{B+A+R} \frac{B-1}{B+A+R-1} \cdots \frac{B-k+1}{B+A+R-k+1} \frac{A+R}{B+A+R-k}$$

si k es menor o igual a B .

2. (1 punto) Calcule la probabilidad que el juego concluya **con una bola azul**, luego de extraer exactamente k bolas blancas.

La probabilidad que el juego termine con una bola azul luego de extraer exactamente k blancas, es similar a la anterior:

$$\frac{B}{B+A+R} \frac{B-1}{B+A+R-1} \cdots \frac{B-k+1}{B+A+R-k+1} \frac{A}{B+A+R-k}$$

si k es menor o igual a B .

3. (2 puntos) Calcule el valor esperado del premio del juego.

Para calcular el valor esperado del juego vamos a considerar como termina: cuántas bolas blancas salieron y si la bola de color fue azul o roja.

Si llamamos $p_a(k)$ a la probabilidad que el juego termine exactamente luego de k bolas blancas con una bola azul (probabilidad calculada en el punto anterior) y $p_r(k)$ a la probabilidad que

el juego termine exactamente luego de k bolas blancas con una bola roja, el valor esperado del premio se puede escribir como

$$\sum_{k=0}^B (X - k)p_a(k) + (Y - k)p_r(k).$$

También se puede escribir este valor esperado usando la probabilidad que el juego termine luego de exactamente k bolas blancas (calculada en el primer punto): si llamamos $p(k)$ a esta probabilidad, el valor esperado del premio puede ser escrito como:

$$\sum_{k=0}^B \left((X - k) \frac{A}{A + R} + (Y - k) \frac{R}{A + R} \right) p(k) = \sum_{k=0}^B \frac{p(k)}{A + R} (AX + RY - k).$$

Considere ahora que el juego continúa hasta que salen dos bolas azules o rojas (del mismo color o una de cada uno). Ahora se recibe un premio de X por cada bola azul que salió, Y por cada roja y se sigue descontando 1 por cada bola blanca.

4. (2 puntos) Calcule el valor esperado del premio de este nuevo juego.

El nuevo juego es esencialmente lo mismo que 2 juegos como el de los puntos anteriores seguidos: el primero con B bolas blancas, A bolas azules y R bolas rojas, y el segundo, dependiendo de cuándo salió y de qué color fue la primera bola de color (azul o roja):

- Si la primera bola de color fue azul y salió luego de exactamente k bolas blancas, el segundo juego es con $B - k$ bolas blancas, $A - 1$ bolas azules y R bolas rojas.
- Si la primera bola de color fue roja y salió luego de exactamente k bolas blancas, el segundo juego es con $B - k$ bolas blancas, A bolas azules y $R - 1$ bolas rojas.

De esta manera, si llamamos $P(B, A, R)$ al valor esperado de un juego con B bolas blancas, A bolas azules y R bolas rojas, el premio del nuevo juego se puede escribir como:

$$P(A, B, R) + \sum_{k=0}^B \left(p_a(k)P(B - k, A - 1, R) + p_r(k)P(B - k, A, R - 1) \right).$$

Problema 2

Un criadero está seleccionando el alimento que comprará para sus animales para las próximas dos temporadas. En el mercado hay dos opciones: Alimento A y Alimento B.

El costo de lo necesario para la primera temporada es para el alimento A, 200 millones de pesos y del alimento B, 150 millones. Para la segunda temporada se consideran los siguientes escenarios posibles:

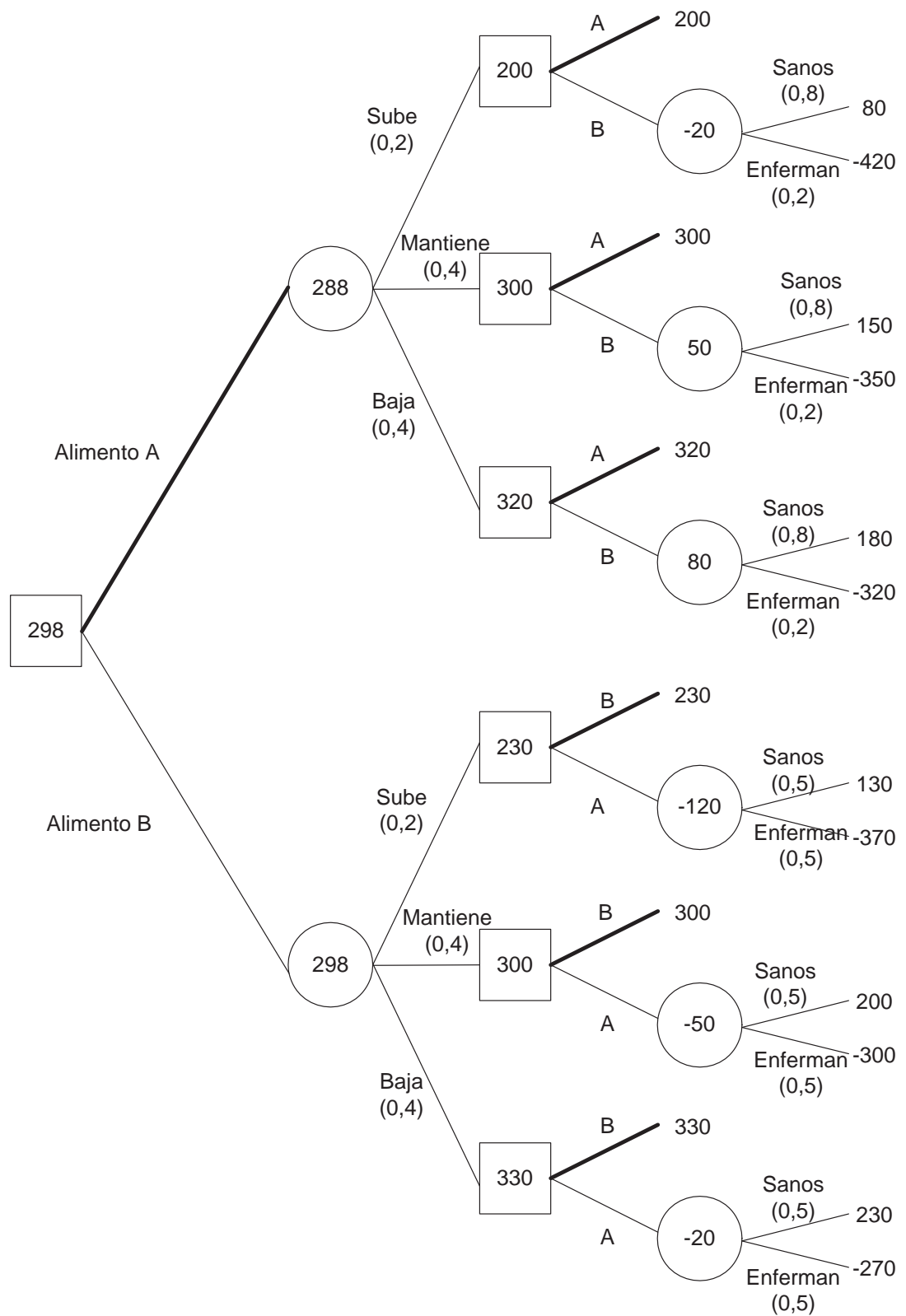
	Alimento A	Alimento B	Probabilidad
Sube	300	220	0,2
Mantiene	200	150	0,4
Baja	180	120	0,4

Si los animales son alimentados dos temporadas con alimento A tienen un valor total de 700 millones, Si son alimentados dos temporadas con alimento B, tienen un valor de 600 millones, mientras que si se los alimenta una temporada con cada alimento, tienen un valor de 500.

Adicionalmente, los animales pueden tener problemas si se cambia de alimento. Esto sucede el 20% cuando se cambia de A a B y el 50% de las veces cuando se cambia de B a A. En estos casos, los animales pierden su valor.

1. (3,0 puntos) Plantee y resuelva un árbol de decisiones que permita determinar qué alimento utilizar en cada temporada de manera de maximizar el valor esperado de los beneficios.

En la figura, se ve un árbol como el pedido:



Ahora, se puede consultar a un analista que le dará mayor información sobre los precios la próxima temporada. Cuando se le consulta, el analista responde ALZA o CAIDA de precios.

En ocasiones anteriores que fue consultado:

- El 50% de las veces que predijo ALZA hubo una subida de precios, el 40% de las veces los precios se mantuvieron y el 10% restante, hubo baja.
- Un sexto de las veces que predijo CAIDA hubo una subida de precios, el 40% de las veces los precios se mantuvieron y en los casos restantes, hubo baja.

2. (3,0 puntos) ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por lo información provista por el analista?

Para calcular esto, resolvemos un árbol de decisiones incorporando la información del analista. Para construir el árbol necesitamos las probabilidades de las respuestas que dará el analista. Estas probabilidades pueden ser calculadas a partir del siguiente sistema de ecuaciones:

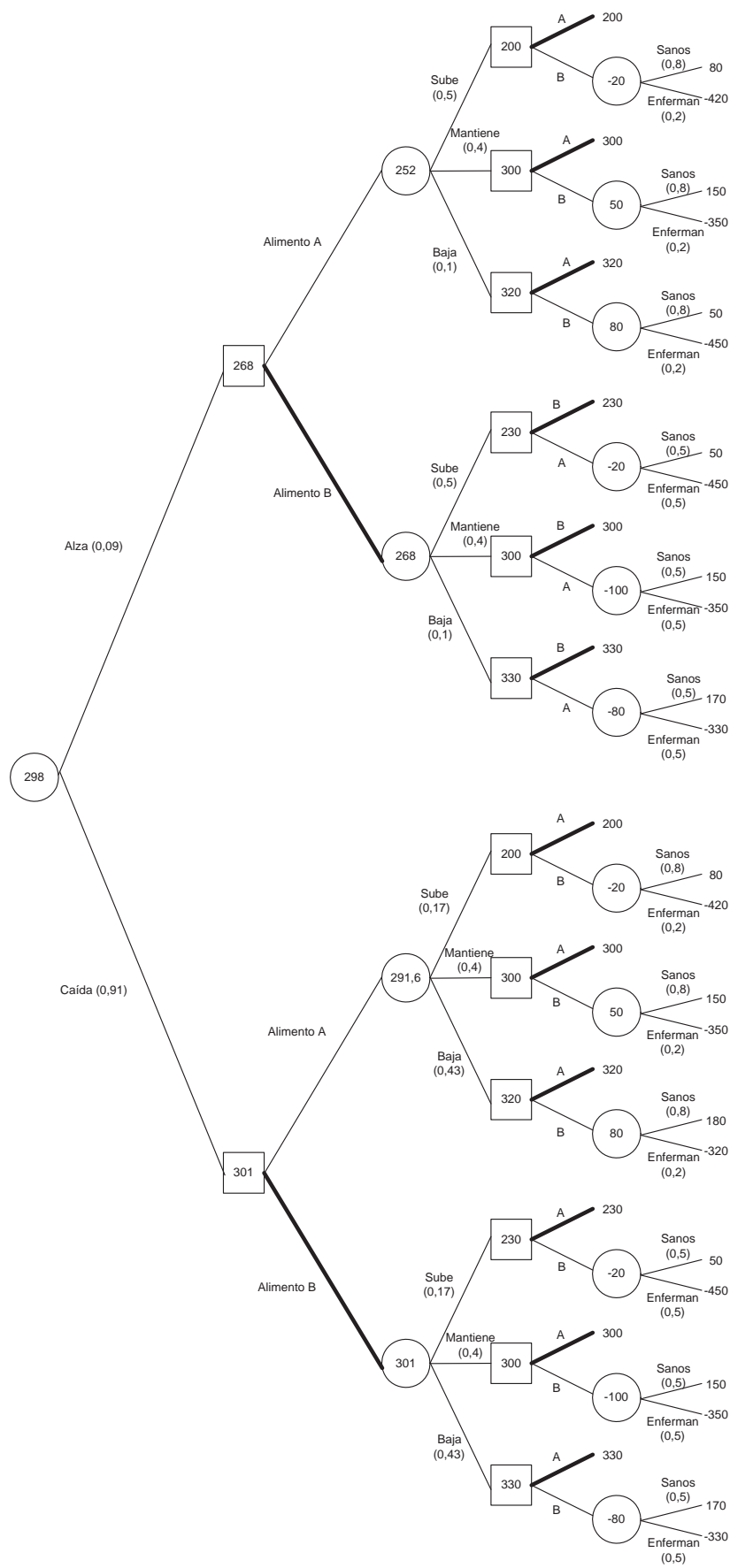
$$\begin{aligned}P(\text{Sube}) &= P(\text{Sube}|\text{Alza})P(\text{Alza}) + P(\text{Sube}|\text{Caida})P(\text{Caida}) \\1 &= P(\text{Alza}) + P(\text{Caida})\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}0,2 &= 0,5P(\text{Alza}) + 0,17P(\text{Caida}) \\1 &= P(\text{Alza}) + P(\text{Caida}).\end{aligned}$$

Así, obtenemos que $P(\text{Alza}) = 0,09$ y $P(\text{Caida}) = 0,91$.

El árbol que queda se ve en la figura:



Se observa que el beneficio esperado en este caso es igual al del primer punto sin la información del analista. Entonces, no se estaría dispuesto a pagar nada por esta información.

Problema 3

Una empresa subcontrata el transporte de sus productos. Para esto contrata un número fijo de camiones para el año. De acuerdo a sus necesidades, cada mes la empresa puede solicitar camiones extra. Estas contrataciones tienen un costo de \$ C por camión adicional más un cargo fijo \$ D si el número de adicionales varía de un mes al siguiente.

Se conocen los requerimientos R_t para cada mes del próximo año. Actualmente, no hay ningún camión adicional trabajando.

Plantee un modelo de programación dinámica determinística que permita programar la contratación de camiones para los próximos T meses a costo mínimo.

- **Etapas:**

Cada uno de los meses: $t = 1, \dots, T$.

- **Variables de estado:**

S_t : el número de camiones asignados en el periodo pasado.

- **Variables de decisión:**

X_t : el número de solicitados en el periodo t .

- **Recurrencia de estados:**

$$S_{t+1} = X_t$$

- **Función de beneficios:**

$$V_t(S_t, X_t) = C \cdot X_t + D \cdot \frac{|X_t - S_t|}{\max\{|X_t - S_t|, 1\}} + V_{t+1}^*(X_t)$$

O de manera equivalente¹:

$$V_t(S_t, X_t) = C \cdot X_t + D \cdot \min\{|X_t - S_t|, 1\} + V_{t+1}^*(X_t)$$

Donde:

$$V_t^*(S_t) = \min_{X_t \geq R_t} \{V_t(S_t, X_t)\}$$

- **Condiciones de borde:**

$$V_{T+1}^*(\%) = 0$$

$$S_1 = 0$$

¹En particular, la inclusión del cargo por variar la cantidad de camiones de un periodo a otro, puede ser representado de varias maneras. Aquí se han incluido sólo dos de ellas.