



## Auxiliar 5: Árboles de Decisión y Programación Dinámica Determinística

Martes 07 de Abril de 2009

### Pregunta 1

■ **Etapas:**

Cada uno de los meses:  $t = 1, \dots, T$

■ **Variables de estado:**

$S_t$ : el número de camiones asignados en el periodo pasado.

■ **Variables de decisión:**

$X_t$ : el número de camiones solicitados en el periodo  $t$ .

■ **Recurrencia de estados:**

$$S_{t+1} = X_t$$

■ **Función de beneficios:**

$$V_t(S_t, X_t) = C \cdot X_t + D \cdot \frac{|X_t - S_t|}{\max\{|X_t - S_t|, 1\}} + V_{t+1}^*(X_t)$$

O de manera equivalente<sup>1</sup>:

$$V_t(S_t, X_t) = C \cdot X_t + D \cdot \min\{|X_t - S_t|, 1\} + V_{t+1}^*(X_t)$$

Donde:

$$V_t^*(S_t) = \min_{X_t \geq R_t} \{V_t(S_t, X_t)\}$$

■ **Condiciones de borde:**

$$V_{T+1}^*(\%) = 0$$

$$S_1 = 0$$

### Pregunta 2

1. Parte a:

■ **Variables de decisión:**

$$\begin{aligned} X_n &= \text{unidades de producto } n \text{ a producir} \\ y_n &= \begin{cases} 1 & \text{Si se fabrica producto } n \\ 0 & \sim \end{cases} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>En particular, la inclusión de cargo por variar la cantidad de camiones de un periodo a otro puede ser representado de varias maneras. Aquí se han incluido sólo dos de ellas.

■ **Variables de estado:**

$S_n = \%$  de la capacidad total disponible para producir producto  $n$

■ **Beneficio acumulado:**

$$\begin{aligned} B_n[S_n, X_n] &= U_n \cdot X_n - C_n \cdot Y_n + V_{n+1}[S_n - K_n \cdot X_n] \\ \text{con } S_{n+1} &= S_n - K_n \cdot X_n \\ \text{donde } V_n[S_n] &= \max_{0 \leq X_n \leq \min(\frac{S_n}{K_n}, D_n)} [B_n[S_n]] \end{aligned}$$

■ **Condiciones de borde:**

$$\begin{aligned} S_1 &= 100\% \\ V_{N+1} &= 0 \end{aligned}$$

2. **Producto 3:**

$S_3/X_3$	0	1	2	3	4	5	$V_3[S_3]$	$X_3^*$
100 %	0	1	2	3	4	5	5	5
80 %	0	1	2	3	4		4	4
60 %	0	1	2	3			3	3
40 %	0	1	2				2	2
20 %	0	1					1	1
0 %	0						0	0

**Producto 2:**

$S_2/X_2$	0	1	2	$V_2[S_2]$	$X_2^*$
100 %	5	4	5	5	0-2
80 %	4	3	4	4	0-2
60 %	3	2		3	0
40 %	2	1		2	0
20 %	1			1	0
0 %	0			0	0

**Producto 1:**

$S_1/X_1$	0	1	2	3	$V_1[S_1]$	$X_1^*$
100 %	5	3	4	5	5	0-3

Por lo tanto existen 3 configuraciones óptimas:

$$\begin{array}{ccc} X_1^* & X_2^* & X_3^* \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}$$

3. La formulación es igual a la de la primera parte, salvo que las variables  $X_n$  son continuas. Entonces debemos resolver para la función de beneficio acumulada,

$$B_n[S_n, X_n] = U_n \cdot X_n - C_n \cdot Y_n + V_{n+1}[S_n - K_n \cdot X_n]$$

$$\text{con} \quad S_{n+1} = S_n - K n \cdot X_n$$

y maximizar para las variables  $X_n$  continuas. Como las  $X_n$  son continuas, las variables de estado  $S_n$  también lo serán.

Producto 3:  $K_3 = 20$

$$B_3[S_3, X_3] = U_3 \cdot X_3 - C_3 \cdot Y_3 + V_4[S_3 - K_3 \cdot X_3]$$

Sin embargo

$$V_4[S_4] = V_4[S_3 - K_3 \cdot X_3] = 0, C_3 = 0, U_3 = 1$$

Entonces,  $B_3[S_3, X_3] = X_3$  y debemos maximizar para todos los valores reales positivos que podría tomar  $X_3$ .

Estos valores posibles van desde 0 hasta  $\frac{S_3}{20}$ , que significa que se produce con todo lo que queda de capacidad disponible.

Es decir,  $X_3^* = \frac{S_3}{20}$  lo que implica que  $V_3[S_3] = \frac{S_3}{20}$ .

Producto 2:  $K_2 = 40$

$$B_2[S_2, X_2] = U_2 \cdot X_2 - C_2 \cdot Y_2 + V_3[S_2 - K_2 \cdot X_2] = 3 \cdot X_2 - 2 \cdot Y_2 + V_2[S_2 - K_2 \cdot X_2]$$

$$B_2[S_2, X_2] = 3 \cdot X_2 - 2 \cdot Y_2 + \frac{(S_2 - K_2 \cdot X_2)}{20}$$

Ahora tenemos que analizar 2 casos.

- $Y_2 = 0 \Rightarrow X_2 = 0$   
por lo que  $B_2[S_2, X_2] = \frac{S_2}{20} = V_2[S_2]$
- $Y_2 = 1 \Rightarrow$

$$B_2[S_2, X_2] = 3 \cdot X_2 - 2 + \frac{(S_2 - 40 \cdot X_2)}{20} = X_2 - 2 + \frac{S_2}{20}$$

Para maximizar  $B_2[S_2, X_2]$  en este caso,  $X_2$  debe tomar el máximo valor posible, que es  $\frac{S_2}{40}$ , con lo que

$$V_2[S_2] = 3 \cdot \frac{S_2}{40} - 2$$

Producto 1:  $K_1 = 20$ ,  $D_1 = 3$  y por condición de borde  $S_1 = 100(\%)$

$$B_1[S_1, X_1] = U_1 \cdot X_1 - C_1 \cdot Y_1 + V_2[S_2] = 2 \cdot X_1 - 3 \cdot Y_1 + V_2[S_1 - K_1 \cdot X_1]$$

■  $Y_1 = 0$ , entonces,  $B_1[S_1, X_1] = V_2[S_1]$ . Tenemos 2 subcasos:

- $Y_2 = 0$ , implica,  $V_1[S_1] = V_2[S_1] = \frac{S_1}{20} = 5$
- $Y_2 = 1$ , implica,  $V_1[S_1] = V_2[S_1] = 3 \cdot \frac{S_1}{40} - 2 = 5, 5$

■  $Y_1 = 1$ , entonces maximizamos  $B_1[S_1, X_1] = 2 \cdot X_1 - 3 + V_2[S_1 - 20 \cdot X_1]$

- $Y_2 = 0$ , implica,  $B_1[S_1, X_1] = 2 \cdot X_1 - 3 + \frac{(S_1 - 20 \cdot X_1)}{20}$

$$B_1[S_1, X_1] = X_1 - 3 + \frac{S_1}{20}$$

Para maximizar  $X_1$  debe ser lo mayor posible,  $X_1 = 3$  ya que  $S_1 = 100$

$$V_1[S_1] = \frac{S_1}{20} = 5$$

- $Y_2 = 1$ , análogamente implica que  $B_1[S_1, X_1] = \frac{X_1}{2} - 5 + 3 \cdot \frac{S_1}{40}$ . Por lo que  $X_1 = 3$  y como  $S_1 = 100$ ,

$$V_1[S_1] = 4$$

De todos los casos vemos que el máximo beneficio acumulado es  $V_1[S_1] = 5, 5$  que significa  $Y_1 = 0$ , por lo que  $X_1 = 0$ .

Además  $Y_2 = 1$ , con lo que  $X_2 = \frac{S_2}{40} = \frac{S_1}{40} = 2, 5$  (se ocupa toda la capacidad en fabricar producto 2. Por lo tanto  $X_3 = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X_1^* &= 0, \\ \Rightarrow X_2^* &= 2, 5, \\ \Rightarrow X_3^* &= 0, \\ V_1[S_1] &= 5, 5. \end{aligned}$$

### Pregunta 3

1. Lo primero es notar que los puntos no tienen nada que ver en la probabilidad de ganar la copa.

Las decisiones que el técnico del equipo A puede tomar antes de empezar un partido es la manera en que va a jugar, y debe considerar que, a priori, las formas que el equipo A salga campeón son:

- Gane el primero y empate o gane el segundo
- Gane el primero, pierda el segundo y gane el definitivo
- Pierda el primero, gane el segundo y gane el definitivo
- Empate el primero y gane el segundo

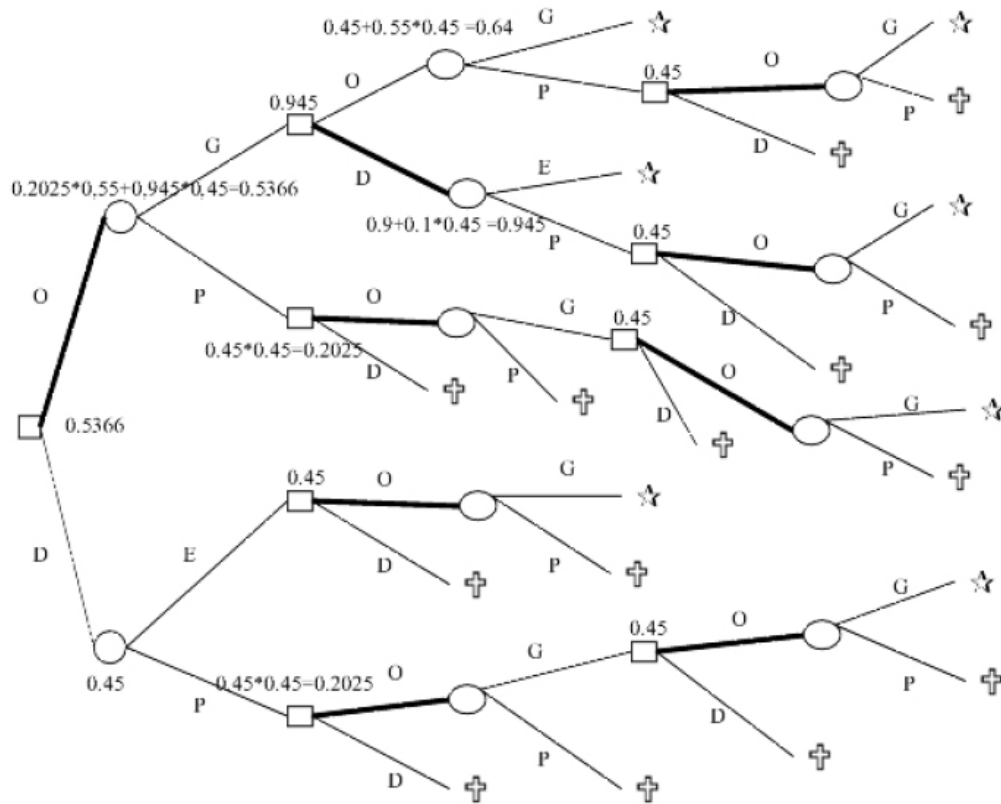


Figura 1: Arbol problema 3

El árbol de decisión asociado se muestra en la figura 1

Notación:

- D = Jugar el partido defensivamente, O = Jugar el partido ofensivamente
- G = Ganar 1 partido, E = Empatar 1 partido, P = Perder 1 partido

Notar que si después de los 2 primeros partidos están empatados, al equipo 1 no le conviene elegir la estrategia defensiva, puesto que por esa vía no puede ganar la copa y con probabilidad  $< 1$  sólo estará igual después de finalizar el encuentro (o empata o pierde). De esta manera lo que en un principio parecía un árbol infinito no le es.

De esta manera vemos que la estrategia óptima es salir jugando a la ofensiva, después si el equipo A gana, basta el empate para ganar la copa. Por otra parte, si pierde, sólo le sirve un triunfo para poder ganar la copa.

Si parte jugando a la defensiva, lo mejor que puede pasar es que empate y luego necesita un triunfo, y con esta estrategia tiene una menor probabilidad de ganar.

2. Curiosamente, el equipo con mayor probabilidad de ganar es el A, a pesar de ser peor que B (lo cual puede observarse en que la probabilidad de ganar 1 partido es menor para el equipo A con ambas estrategias). Esto se debe a que el equipo A tiene la opción de elegir cómo jugar después de conocer el resultado de cada partido. Poder adecuar su estrategia es lo que le da la ventaja.

## Pregunta 4

### ■ Etapas:

Cada uno de los niños:  $i = 1, \dots, M$

■ **Variables de estado:**

$s_i$ : cantidad de huevos que le quedan por repartir al conejito de pascua antes de obsequiarle al niño  $i$ .

■ **Variables de decisión:**

$x_i$ : cantidad de huevos que recibe el niño  $i$ , con  $x_i > 0$ .

■ **Recurrencia de estados:**

$$s_{i+1} = s_i - x_i$$

■ **Función de beneficios:**

$$V_i(s_i, x_i) = \ln(\min\{x_i, N_i^{max}\}) + V_{i+1}^*(s_{i+1})$$

Donde:

$$V_i^*(s_i) = \max_{x_i} \{V_i(s_i, x_i)\}$$

■ **Condiciones de borde:**

$$V_{M+1}^*(\%) = 0$$

$$s_1 = N$$