



Auxiliar 3: Árboles de Decisión

Martes 31 de Marzo de 2009

Pregunta 1

1. El árbol de decisión queda como indica la figura:

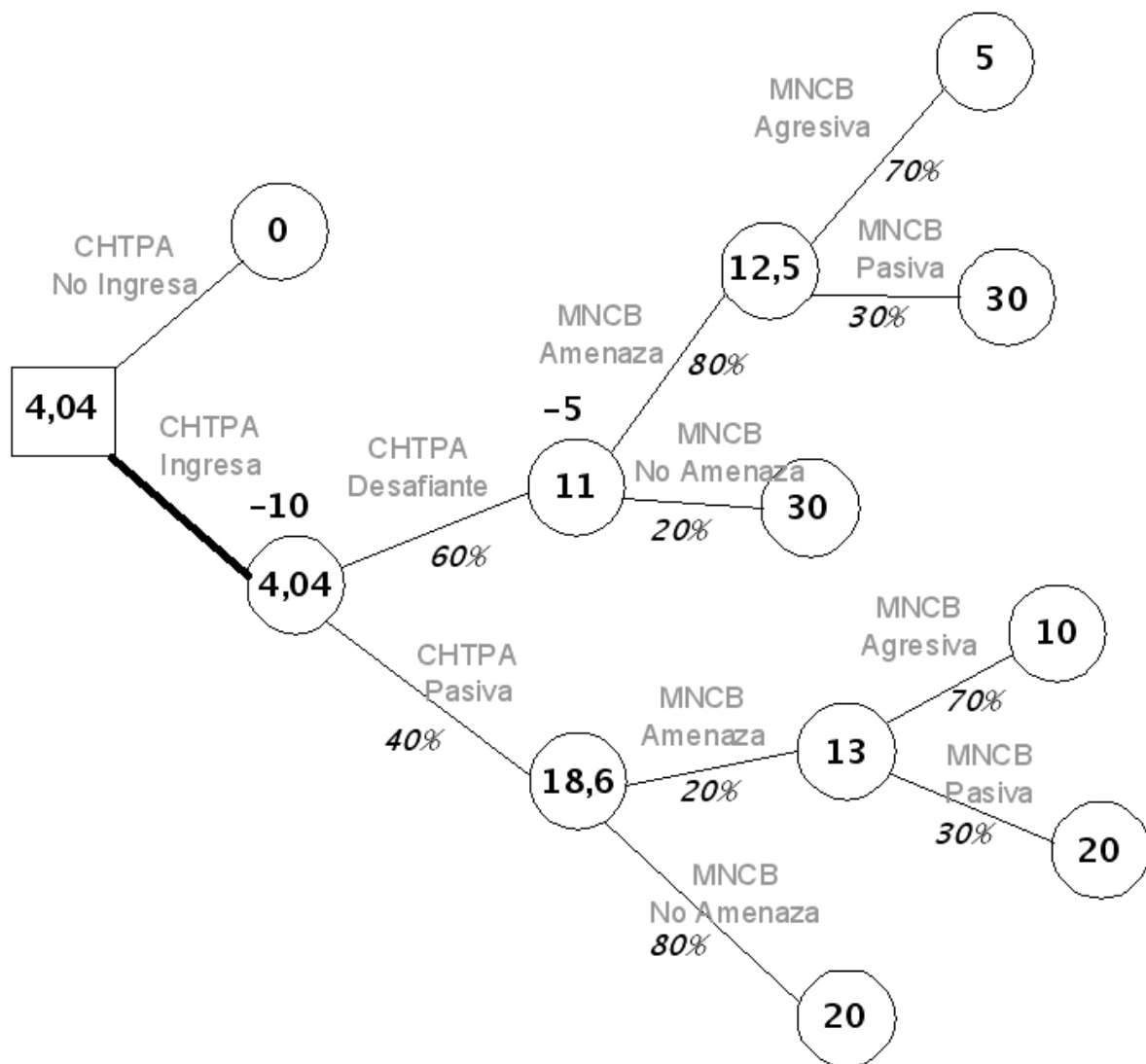


Figura 1: Arbol problema 1.1

Las probabilidades que no se especifican en el enunciado (la probabilidad que MonoCobre amenace dado que ChileExplota entra desafiante) fueron calculadas de la siguiente manera:

$$\mathcal{P}(\text{CHTPA des.} \mid \text{MNCB am.}) = 85,7\%$$

$$\mathcal{P}(\text{MNCB am.} \mid \text{CHTPA des.}) = \frac{\mathcal{P}(\text{CHTPA des.} \mid \text{MNCB am.}) \cdot \mathcal{P}(\text{MNCB am.})}{\mathcal{P}(\text{CHTPA des.})}$$

$$= \frac{0,857 \cdot \mathcal{P}(MNCB \text{ am.})}{0,6}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(MNCBam.) &= \mathcal{P}(MNCBam.|CHTPA des.) \cdot \mathcal{P}(CHTPA des.) + \mathcal{P}(MNCBam.|CHTPA pas.) \cdot \mathcal{P}(CHTPA pas.) \\ &= 0,857 \cdot \mathcal{P}(MNCB \text{ am.}) + 0,2 \cdot 0,4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(MNCB \text{ am.}) = 0,56$$

Por último

$$\mathcal{P}(MNCB \text{ am.} \mid CHTPA \text{ des.}) = \frac{0,857 \cdot 0,56}{0,6} = 0,8$$

La empresa ganaría 4,04 millones por ingresar.

2. El nuevo árbol sería:

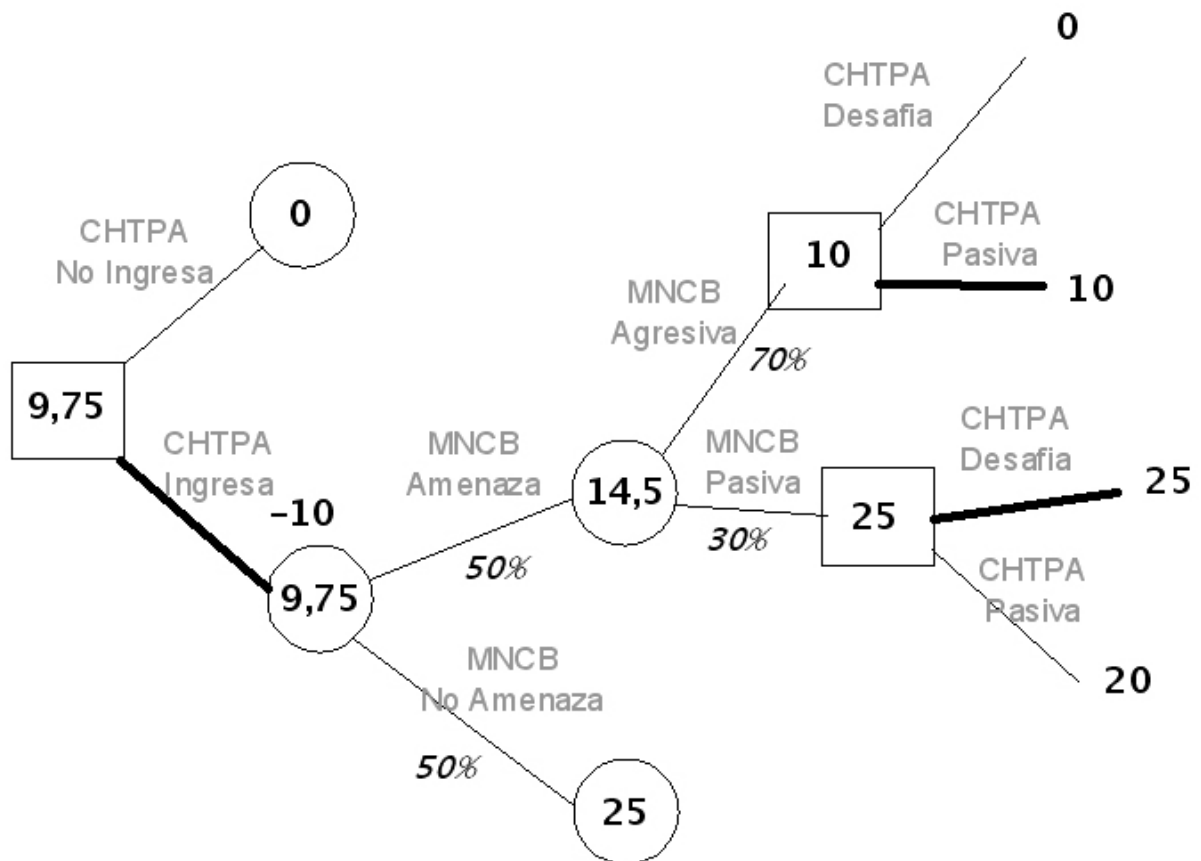


Figura 2: Arbol problema 1.2

Y el valor de la información perfecta es: $9,75 - 4,04 = 5,71$ millones de pesos.

Pregunta 2

1. La siguiente nomenclatura es empleada para cada decisión del árbol:

- P : realizar piscinazo
- M : ir por mano a mano
- CP : árbitro cobra penal
- NP : árbitro no cobra penal
- PI : Buenanote tira penal a la izquierda
- PD : Buenanote tira penal a la derecha
- API : Arquero se tira penal a la izquierda
- APD : Arquero se tira penal a la derecha
- PM : Buenanote no elude a Mac y no puede ir por mano a mano
- GM : Buenanote elude a Mac y va por mano a mano
- TI : Buenanote tira a la izquierda en mano a mano
- TD : Buenanote tira a la derecha en mano a mano
- ATI : Arquero se tira en mano a mano a la izquierda
- ATD : Arquero se tira en mano a mano a la derecha

El problema se puede modelar con el árbol de la siguiente figura (los pagos están expresados en US \$).

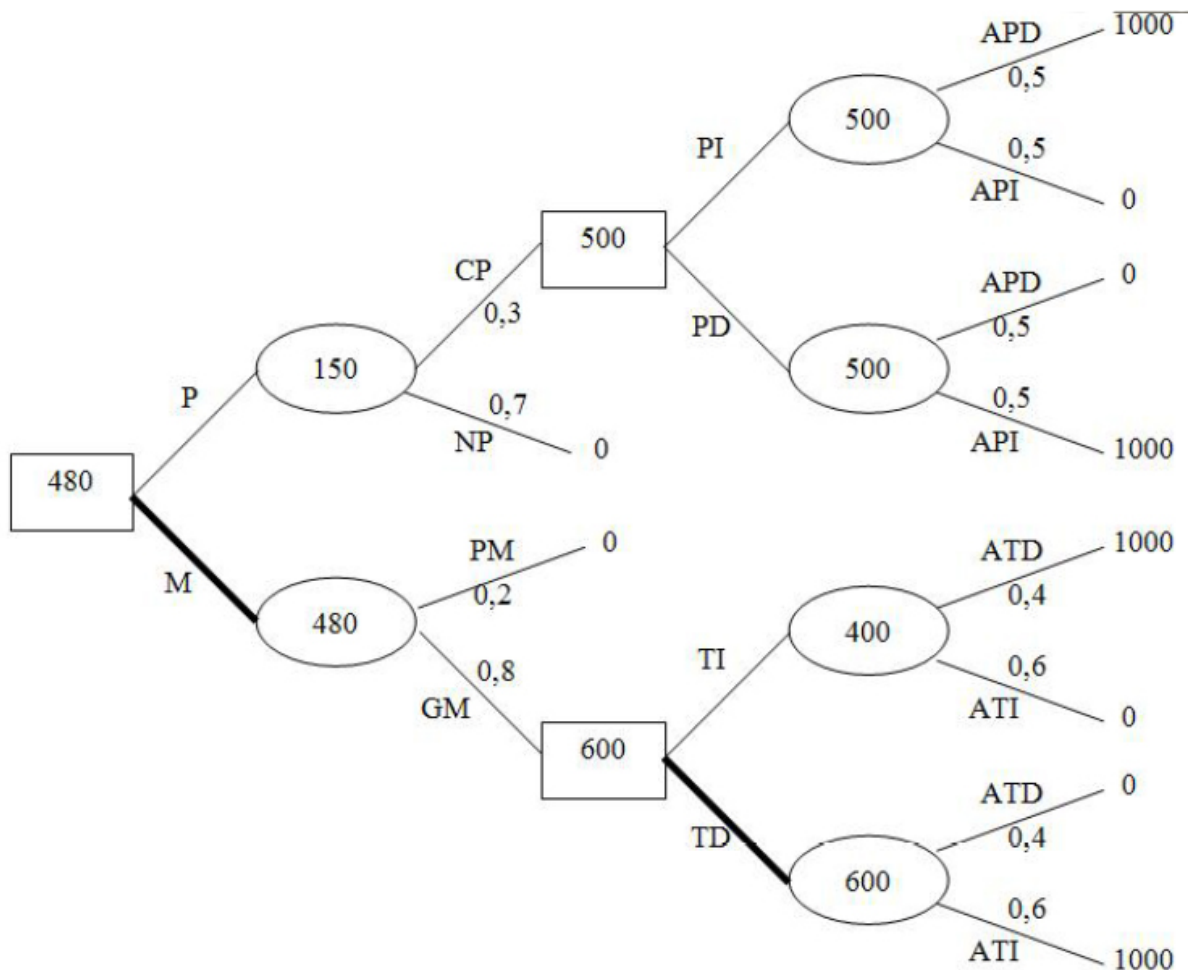


Figura 3: Arbol problema 2.1

Luego Buenanote debe intentar eludir a Mac y rematar hacia la derecha.

2. Ahora debemos comparar los retornos esperados de la alternativa de recibir los consejos del Gurú y ver que decisión óptima tomar. Para esto, usamos las siguientes consideraciones de nomenclatura:

SG : no son contratados los servicios del Gurú
 CG : son contratados los servicios del Gurú
 GPI : Gurú predice atajada de penal a la izquierda
 GPD : Gurú predice atajada de penal a la derecha
 GTI : Gurú predice que arquero se tira en mano a mano a la izquierda
 GTD : Gurú predice que arquero se tira en mano a mano a la derecha

Debido a que el Gurú predice el lado que se tirará el arquero sin importar si es penal o mano a mano, se tendrán las siguientes igualdades de probabilidades condicionales:

$$\mathcal{P}(GPD \mid APD) = \mathcal{P}(GTD \mid ATD) = 0,8$$

$$\mathcal{P}(GPI \mid API) = \mathcal{P}(GTI \mid ATI) = 1$$

Inicialmente analizaremos el caso de las probabilidades de los tiros penales y luego extenderemos para el caso del mano a mano.

Para realizar la estimación de este árbol se requiere saber las probabilidades condicionadas inversamente de $\mathcal{P}(GPD \mid APD)$ y $\mathcal{P}(GPI \mid API)$. Para ello se puede ver que:

$$\mathcal{P}(GPD \mid APD) = 0,8 = 1 - \mathcal{P}(GPI \mid APD)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(GPI \mid APD) = 0,2$$

$$\mathcal{P}(GPI \mid API) = 1 = 1 - \mathcal{P}(GPD \mid API)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(GPD \mid API) = 0$$

Así utilizando probabilidades totales se tiene que:

$$\mathcal{P}(GPD) = \mathcal{P}(GPD \mid APD) \cdot \mathcal{P}(APD) + \mathcal{P}(GPD \mid API) \cdot \mathcal{P}(API) = 0,8 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5 = 0,4$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(GPI) = 1 - \mathcal{P}(GPD) = 0,6$$

Ahora realizando Bayes se obtienen las probabilidades deseadas:

$$\mathcal{P}(APD \mid GPD) = \frac{\mathcal{P}(GPD \mid APD) \cdot \mathcal{P}(APD)}{\mathcal{P}(GPD)} = \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,4} = 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(API \mid GPD) = 1 - \mathcal{P}(APD \mid GPD) = 0$$

$$\mathcal{P}(API \mid GPI) = \frac{\mathcal{P}(GPI \mid API) \cdot \mathcal{P}(API)}{\mathcal{P}(GPI)} = \frac{1 \cdot 0,5}{0,6} = 0,833$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(APD \mid GPI) = 1 - \mathcal{P}(API \mid GPI) = 0,167$$

Para el caso de los mano a mano se realiza el mismo procedimiento. Primero probabilidades totales para obtener:

$$\mathcal{P}(GTD) = 0,32$$

$$\mathcal{P}(GTI) = 0,68$$

Y luego empleando Bayes:

$$\mathcal{P}(ATD \mid GTD) = 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(ATI \mid GTD) = 0$$

$$\mathcal{P}(ATI \mid GTI) = 0,88$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(ATD \mid GTI) = 0,12$$

Luego de obtenidas estas probabilidades el árbol resultante se muestra en la siguiente figura:

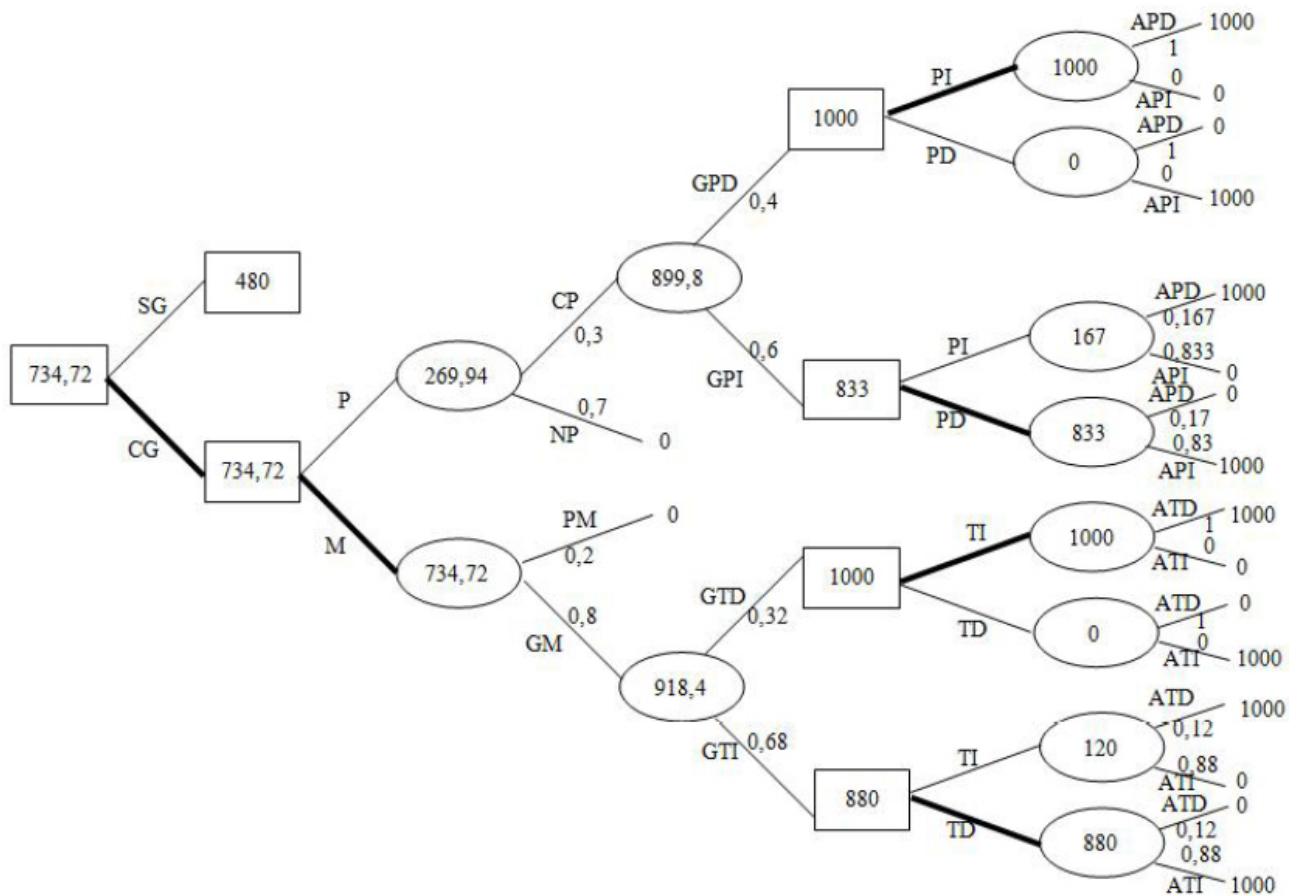


Figura 4: Arbol problema 2.2

Como se observa en el árbol de la figura, al equipo le conviene contratar al Gurú y éste puede cobrar hasta $US\$734,72 - US\$480 = US\$254,72$ por utilizar sus habilidades predictivas en beneficio del equipo de Buenanote.

Pregunta 3

- De la figura 5 se ve que el precio máximo es $v = 35$.

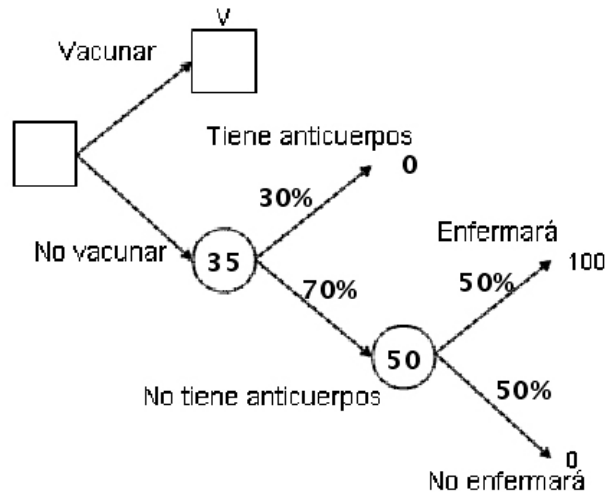


Figura 5: Arbol problema 3.1

- Sean:
 A = Persona con anticuerpos.
 S = Persona sin anticuerpos.
 TA = Test dice persona tiene anticuerpos.
 TS = Test dice persona no tiene anticuerpos.

Entonces lo que se nos entrega en el enunciado es:

$$\begin{aligned} P[A] &= 0,3 & P[S] &= 0,7 \\ P[TS|A] &= 0,1 & P[TA|A] &= 0,9 \\ P[TS|S] &= 1 - p & P[TA|S] &= p \end{aligned}$$

Entonces, utilizando probabilidades totales se puede ver que:

$$P[TA] = P[TA|A] \cdot P[A] + P[TA|S] \cdot P[S] = 0,7p + 0,27 = 1 - P[TS]$$

Por otro lado tendremos que:

$$P[S|TS] = \frac{P[TS|S] \cdot P[S]}{P[TS]} = \frac{0,7 - 0,7p}{0,73 - 0,7p} = 1 - P[A|TS]$$

$$P[S|TA] = \frac{P[TA|S] \cdot P[S]}{P[TA]} = \frac{0,7p}{0,27 + 0,7p} = 1 - P[A|TA]$$

Si consideramos:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{35p}{0,27 + 0,7p} < 40 \Rightarrow p < \frac{10,8}{7} \\ \beta &= \frac{35 - 35p}{0,73 - 0,7p} > 40 \Rightarrow p < 0,829 \\ \delta &= 35p + (0,73 - 0,7p) \cdot 40 < 35 \Rightarrow p < 0,17 \end{aligned}$$

El árbol resultante se ve como el de la figura 6.

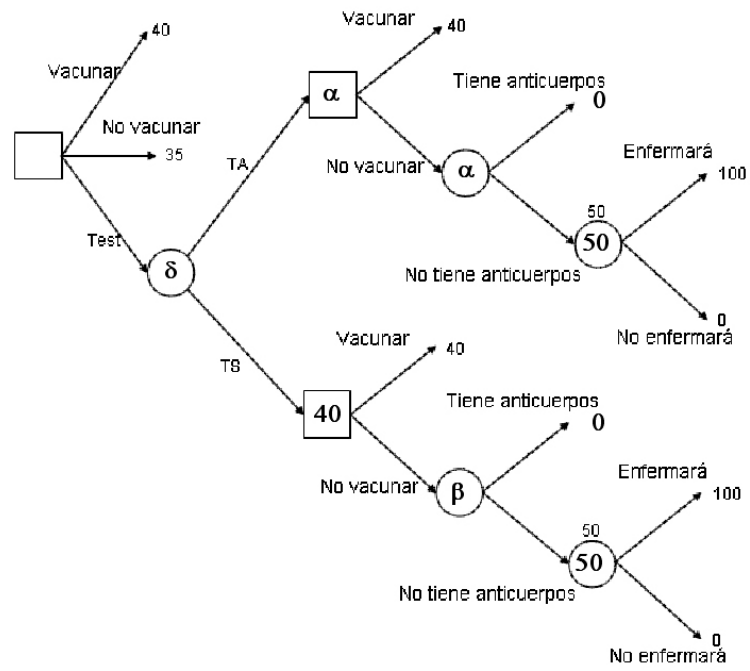


Figura 6: Arbol problema 3.2

3. Propuesto