Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profesor: José R. Correa, Rafael Esptein
Prof. Aux.: J. Gacitúa, C. Thraves, R. Lagos, S. Astroza

Pauta CTP 1

Miércoles 25 de Marzo de 2009

Un agricultor siembra semillas de manzanos y naranjos, donde la probabilidad de que la semilla sea de un manzano es p y que sea un naranjo es *1-p*, plantando un total de S árboles. Por otro lado se sabe que los manzanos y naranjos dan un fruto según una distribución exponencial de tasa λ_m y λ_n respectivamente. Asuma que todos los árboles se plantan al mismo tiempo y la independencia en la elección de cada semilla para cada árbol.

1. Encuentre la probabilidad de que la primera fruta obtenida sea una manzana, en el caso de que se sepa que hay m manzanos y n naranjos plantados (1 punto).

   Estamos en el caso de una carrera de exponenciales entre $T_m \sim Min\{tm_1, \ldots, tm_m\}$ y $T_n \sim Min\{tn_1, \ldots, tn_n\}$.
   Donde: $T_m \sim \exp(m \cdot \lambda_m)$ $T_n \sim \exp(n \cdot \lambda_n)$

$$P(T_m \leq T_n) = \frac{m \cdot \lambda_m}{m \cdot \lambda_m + n \cdot \lambda_n}$$

2. Encuentre la misma probabilidad de antes en el caso en que no sepa la cantidad de árboles de cada tipo que se han plantado (1 punto).

   Se debe condicionar sobre el número de árboles de cada tipo plantado inicialmente
   Sea M v.a. igual al número de manzanos

$$\begin{aligned} P(T_m \leq T_n) &= \sum_{i=0}^{S} P(T_m \leq T_n | M = i) \cdot P(M = i) \\ &= \sum_{i=0}^{S} \frac{i \cdot \lambda_m}{i \cdot \lambda_m + (S - i) \cdot \lambda_n} \cdot \binom{S}{i} p^i (1-p)^{S-i} \end{aligned}$$

3. Calcule la probabilidad de que en las próximas h unidades de tiempo se tenga al menos una fruta nueva, dado que la última fruta obtenida fue una manzna hace u unidades de tiempo atrás (1 punto).

   Calculamos la probailidad complementaria, y aplicamos la perdida de memoria de la exp ignorando la última fruta sean las v. a.:
   M: Número de manzanos plantados
   T_m : tiempo en que tarda en brotar la próxima manzana
   T_n : tiempo en que tarda en brotar la próxima naranja

$$\begin{aligned} P(T_m < h \vee T_n < h) &= 1 - P(T_m > h \wedge T_n > h) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{S} P(T_m > h \wedge T_n > h | M = i) \cdot P(M = i) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{S} P(T_m > h | M = i) \cdot P(T_n > h | M = i) \cdot P(M = i) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{S} e^{-h \cdot \lambda_m \cdot i} \cdot e^{-h \cdot \lambda_n \cdot (s-i)} \cdot \binom{S}{i} p^i (1-p)^{S-i} \end{aligned}$$

Ojo, en estricto rigor la sumatoria debiese ser desde 1 a S ya que dado que sé que tengo una manzana, entonces se debiese tener al menos un manzano. Sin embargo, dar todo el puntaje en caso de que los límites sean desde 0 a S, ya que lo importante del problema era reconocer la perdida de memoria de la exponencial.

Otra forma posible:

$$\begin{aligned} P(T_m < h \vee T_n < h) &= P(T_m < h) + P(T_n < h) \\ &= \sum_{i=1}^{S} P(T_m < h|M = i) \cdot P(M = i) + \sum_{i=1}^{S} P(T_n < h|M = i) \cdot P(M = i) \\ &= \sum_{i=1}^{S} (1 - e^{-h\cdot\lambda_m\cdot i}) \cdot \binom{S}{i} p^i (1-p)^{S-i} + \sum_{i=1}^{S} (1 - e^{-h\cdot\lambda_n\cdot(S-i)}) \cdot \binom{S}{i} p^i (1-p)^{S-i} \end{aligned}$$

Sponga que desde ahora se tiene la misma plantación, donde se sabe que el número de naranjos es n y el de manzanos es m, sin embargo ha llegado una bacteria que afecta a los naranjos haciendo que cada naranja salga buena con una probabilidad b y afectando a los manzanos haciendo que estos puedan dar un sólo fruto cada uno.

4. Calcular el tiempo promedio que se debe esperar para obtener la próxima naranja comestible (1 punto).

   tn_i : tiempo que tarda en brotar la *i-esima* naranja desde que brotó la *(i-1)-esima*.
   $tn_i \sim \exp(n \cdot \lambda_n)$
   Tn_i : tiempo que tarda en brotar la *i-esima* naranja.
   $Tn_i = \sum_{j=1}^{i} tn_j$

   $E($ Tiempo en obtener la primera naranja buena $) = \sum_{i=0}^{\infty} E(Tn_i|$ han salidos (i-1) naranjas malas y la i es buena $) \cdot P($han salidos (i-1) naranjas malas y la i es buena$)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{\infty} (\sum_{j=1}^{i} E(Tn_j)) \cdot b \cdot (1-b)^{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{\lambda_n \cdot n} \cdot b \cdot (1-b)^{i-1} \\ &= \frac{b}{\lambda_n \cdot n} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot (1-b)^{i-1} \\ &= \frac{b}{\lambda_n \cdot n} \cdot \frac{1}{b^2} \\ &= \frac{1}{\lambda_n \cdot n \cdot b} \end{aligned}$$

5. Calcular el tiempo promedio que se debe esperar para obtener la próxima manzana, dado que hasta el momento se ha obtenido una cosecha de k manzanas (m > k) (1 punto).

   tm_i : tiempo que tarda en brotar la *i-esima* manzana desde que brotó la *(i-1)-esima*.
   $tm_i \sim \exp((m - (i-1)) \cdot \lambda_m)$
   En particular la VA que me interesa es: tm_{k+1}
   $tm_{k+1} \sim \exp((m-k) \cdot \lambda_m)$

$$E(tm_{k+1}) = \frac{1}{(m-k)\cdot\lambda_m}$$

Un agronomo especialista en naranjos le ofrece sus servicios, los cuales como resultado se obtiene que el tiempo de brote de cada naranja de distribuye ahora según una exponencial de tasa μ_n ($\mu_n \geq \lambda_n$), además todas las naranjas obtenidas son buenas. Suponga que el valor de una naranja es de \$100 la unidad.

6. Calcule el valor que estaría dispuesto a pagar el agricultor por el servicio del agronomo (por unidades de tiempo) (1 punto).
   Indicación: Trabaje con utilidades por unidaes de tiempo.

   Por la parte 4, la esperanza de la utilidad por unidad de tiempo que tengo (por la venta de naranjas) es:

$$\begin{aligned} E(U) &= \frac{\$100}{\frac{1}{\lambda_n \cdot n \cdot b}} \\ &= \$100 \cdot \lambda_n \cdot n \cdot b \end{aligned}$$

   Desprendiendo del resultado obteido en la parte 4, con el agronomo se tiene que $b = 1$, luego, en este caso la esperanza de la utilidad será (contando el costo por los servicios del profesional, sea \$C) por unidad de tiempo:

$$E(U) = \$100 \cdot \mu_n \cdot n - \$C$$

   Luego la cantidad máxima dispuesta a pagar \$C es tal que:

$$\begin{gathered} \$100 \cdot \lambda_n \cdot n \cdot b < \$100 \cdot \mu_n \cdot n - \$C \\ \$C < \$100 \cdot n \cdot (\mu_n - b \cdot \lambda_n) \end{gathered}$$