



Pauta Auxiliar 2: Probabilidades

Martes 24 de Marzo de 2009

Pregunta 1

Una fábrica produce ampolletas y las distribuye en cajas de U unidades. Cada ampolleta puede salir en calidad *normal* con probabilidad p o *deficiente* con probabilidad $(1 - p)$. Una vez instaladas, las ampolletas de tipo *normal* duran un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro $\lambda_n \frac{1}{[hora]}$ antes de fallar mientras que las de tipo *deficiente* lo hacen en un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro $\lambda_d \frac{1}{[hora]}$.

- (1 punto) Determine la distribución del número de ampolletas *deficientes* en una caja cualquiera.

Sea N una v.a. que representa el número de ampolletas deficientes en una caja cualquiera. Se tiene:

$$N \rightsquigarrow Binomial(U, 1 - p)$$

- (1 punto) Las U ampolletas de una caja se instalaron hace 1 hora y están todas funcionando. Si en esta caja había i ampolletas *deficientes*, calcule la probabilidad que una ampolleta *normal* falle antes que una *deficiente*.

Dada la pérdida de memoria de las distribuciones exponenciales, podemos obviar la hora de funcionamiento que ya llevan las ampolletas.

Sea,

- Y el conjunto de ampolletas deficientes. ($|Y| = i$)
- X el conjunto de ampolletas normales. ($|X| = U - i$)
- T_k tiempo en fallar la ampolleta k .

Buscamos entonces,

$$P_i = P(\min\{T_j\}_{j \in X} \leq \{\min T_k\}_{k \in Y}) = \frac{(U - i)\lambda_n}{(U - i)\lambda_n + i\lambda_d}$$

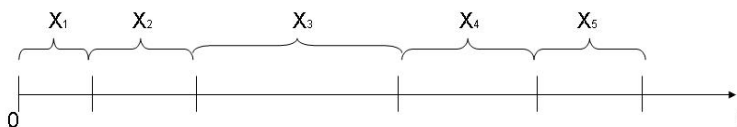
- (2 puntos) Para una caja cualquiera, calcule la probabilidad que una ampolleta normal falle antes que una deficiente.

Condicionamos sobre el número de ampolletas deficientes en la caja. La probabilidad buscada es

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=0}^U P_i \cdot P(i \text{ ampolletas deficientes}) \\ &= \sum_{i=0}^U \frac{(U - i)\lambda_n}{(U - i)\lambda_n + i\lambda_d} \cdot \binom{U}{i} (1 - p)^i p^{U-i} \end{aligned}$$

- (2 puntos) Se acaban de instalar simultáneamente U ampolletas *normales*. En promedio, ¿en cuántas horas más habrán fallado todas?

Sea X_i el tiempo que demora en fallar la primera de i ampolletas cuando ya han fallado $U - i$.



El tiempo promedio que buscamos es

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^U X_i\right]$$

Sea B_i conjunto de ampolletas buenas cuando quedan i . Sea T_j una v.a. que representa el tiempo que tarda en fallar una ampolleta normal con $j = 1, \dots, U$. Luego,

$$X_i = \min \{T_j\}_{j \in B_i}$$

Ocupando la fórmula para el mínimo de un conjunto de exponenciales y la propiedad de pérdida de memoria de la exponencial,

$$X_i \sim \exp(i \cdot \lambda_n)$$

El tiempo esperado que se busca es $E[X]$,

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^U X_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^U E[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^U \frac{1}{i \cdot \lambda_n} \end{aligned}$$

Bonus (0.5 puntos):

Responda todas las preguntas anteriores, considerando que U es una v.a. Poisson de tasa μ .

Todo se resuelve condicionando sobre $U \sim \text{Poisson}(\lambda)$

1. Sea N el numero de ampolletas defectuosas en una caja.

$$P(N = i) = \sum_{j=1}^{\infty} \binom{j}{i} (1-p)^j p^{j-i} \cdot P(U = j)$$

2. Sabemos que había i ampolletas deficientes, pero el número total de ampolletas, U , es aleatorio. Condicionamos sobre U .

$$P_i = \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(j-i)\lambda_n}{(j-i)\lambda_n + i\lambda_d} \cdot P(U = j)$$

3. Calculamos condicionando sobre U ,

$$P = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^j \frac{(j-i)\lambda_n}{(j-i)\lambda_n + i\lambda_d} \cdot \binom{j}{i} (1-p)^i p^{j-i} \cdot P(U = j)$$

- 4.

$$E[X] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{(j-i)\lambda_n} \cdot P(U = j)$$

Pregunta 2

1. Para lograr dar k vueltas sin chocar es necesario que cada una de esas vueltas no resulten en un choque. Dado que la probabilidad de no chocar en una vuelta x es independiente de todo lo demás, se tendrá que:

$$P[\text{Dar más de } k \text{ vueltas}] = (1 - q)^k$$

De esta forma, la probabilidad de terminar la carrera será:

$$P[\text{Dar } V \text{ vueltas sin chocar}] = (1 - q)^V$$

2. Sin considerar a Feliceo, la probabilidad que $(M - 1)$ pilotos terminen la carrera, será:

$$P[\text{Terminen } (M-1) \text{ de } (C-1)] = \binom{C-1}{M-1} ((1 - q_1)^V)^{M-1} (1 - (1 - q_1)^V)^{C-M}$$

3. Utilizando un resultado conocido:

$$P[\text{Gane Feliceo } |M] = P[\text{Exp}(\mu) \text{ le gane a } \text{mínimo de } M-1 \text{ Exp}[\lambda]] = \frac{\mu}{\mu + (M - 1)\lambda}$$

4. Siguiendo la indicación del enunciado:

$$\begin{aligned} P[\text{Feliceo gane}] &= P[\text{Gane Feliceo} | \text{llega}] P[\text{llega}] + P[\text{Gane Feliceo} | \text{No llega}] P[\text{No llega}] \\ &= P[\text{Gane Feliceo} | \text{llega}] (1 - q_2)^V + 0 \\ &= (1 - q_2)^V \cdot \sum_{M=1}^C P[\text{Gane Feliceo} | \text{llega} | \text{llegan otros } M - 1] P[\text{llegan otros } M - 1] \\ &= (1 - q_2)^V \cdot \sum_{M=1}^C \frac{\mu}{\mu + (M - 1)\lambda} \binom{C-1}{M-1} ((1 - q_1)^V)^{M-1} (1 - (1 - q_1)^V)^{C-M} \end{aligned}$$

5. Notemos que:

$$\begin{aligned} E[\text{Utilidades}] &= E[U(\text{Ganar})] + E[U(\text{Terminar})] - E[U(\text{Chocar})] \\ &= W \cdot (1 - q_2)^V \cdot \sum_{M=1}^C \frac{\mu}{\mu + (M - 1)\lambda} \binom{C-1}{M-1} ((1 - q_1)^V)^{M-1} (1 - (1 - q_1)^V)^{C-M} \\ &\quad + T \cdot (1 - q_2)^V - R \cdot (1 - (1 - q_2)^V) \end{aligned}$$