



## Auxiliar 2: Probabilidades

Martes 24 de Marzo de 2009

### Pregunta 1 (CTP1 Primavera2009)

Una fábrica produce ampolletas y las distribuye en cajas de  $U$  unidades. Cada ampolleta puede salir en calidad *normal* con probabilidad  $p$  o *deficiente* con probabilidad  $(1 - p)$ . Una vez instaladas, las ampolletas de tipo *normal* duran un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro  $\lambda_n \frac{1}{[hora]}$  antes de fallar mientras que las de tipo *deficiente* lo hacen en un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro  $\lambda_d \frac{1}{[hora]}$ .

1. (1 punto) Determine la distribución del número de ampolletas *deficientes* en una caja cualquiera.
2. (1 punto) Las  $U$  ampolletas de una caja se instalaron hace 1 hora y están todas funcionando. Si en esta caja había  $i$  ampolletas *deficientes*, calcule la probabilidad que una ampolleta *normal* falle antes que una *deficiente*.
3. (2 puntos) Para una caja cualquiera, calcule la probabilidad que una ampolleta normal falle antes que una deficiente.
4. (2 puntos) Se acaban de instalar simultáneamente  $U$  ampolletas *normales*. En promedio, ¿en cuántas horas más habrán fallado todas?

Bonus (0.5 puntos):

Responda todas las preguntas anteriores, considerando que  $U$  es una v.a. Poisson de tasa  $\mu$ .

### Pregunta 2

Considere una carrera de la Fórmula Pindy en la cual compiten  $C$  pilotos de diferentes escuderías. Para cada una de las  $V$  vueltas de la carrera e independiente de todo lo demás, un piloto tiene una probabilidad  $q_1$  de tener un accidente y quedar fuera de competencia. Esta probabilidad es la misma para todos los pilotos, excepto para nuestro querido Feliceo Baltazar, para el cual se tiene probabilidad  $q_2$  (con  $q_2 > q_1$ ).

Si un piloto logra terminar la carrera, el tiempo que transcurre desde que parte, en la primera vuelta, hasta que cruza la meta, en la vuelta  $V$ , se distribuye según una variable aleatoria exponencial de tasa  $\mu$  para Feliceo, y variables aleatorias exponenciales i.i.d de tasa  $\lambda$  para el resto de los conductores.

Por el solo hecho de que Baltazar termine la carrera, su escudería recibe  $T$ , y si gana recibirá adicionalmente  $W$ . Por otra parte, si nuestro piloto no termina la carrera la escudería deberá pagar a la organización  $R$ .

La intención de esta pregunta es encontrar el valor esperado de los beneficios que reporta Feliceo a su escudería. Para ello responda las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que un piloto en particular logre dar más de  $k$  vueltas sin chocar? ¿Cuál es la probabilidad de que termine la carrera? (trabaje en términos de un  $q$  genérico).
2. Sin considerar a Feliceo, ¿cuál es la probabilidad de que  $(M - 1)$  de los  $(C - 1)$  pilotos restantes terminen la carrera?
3. Dado que  $M$  pilotos terminan la carrera (incluido Feliceo), ¿cuál es la probabilidad de que  $F$ . Baltazar sea el ganador?
4. Usando los resultados de las partes 2. y 3., encuentre una expresión para la probabilidad de que Feliceo gane la carrera.
5. Finalmente, en función de los resultados de todas las partes anteriores, indique el valor esperado que reporta la carrera de Feliceo Baltazar a su escudería.