



Universidad de Chile

Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa

Profs: R. Epstein, J. Correa

Auxs: S. Astroza, C. Thraves, J. Gacitúa, R. Lagos

Solución Clase Auxilliary 1, 18 de Marzo de 2009

Repaso Probabilidades

Problema 1

1. Hay que demostrar que:

$$P[x > s + t | x > s] = P[x > t]$$

Entonces:

$$\begin{aligned} P[x > s + t | x > s] &= \frac{P[x > s + t \wedge x > s]}{P[x > s]} \\ &= \frac{P[x > s + t]}{P[x > s]} \\ &= \frac{1 - P[x \leq s + t]}{1 - P[x \leq s]} \\ &= \frac{1 - [1 - e^{-\lambda(s+t)}]}{1 - [1 - e^{-\lambda(s)}]} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda(s)}} \\ &= e^{-\lambda t} \\ &= P[x \geq t] \end{aligned}$$

2. Tenemos que:

$$\begin{aligned} P[T_1 < T_2] &= \int_0^\infty P[T_1 < T_2 | T_2 = t] \cdot f_{T_2}(t) dt \\ &= \int_0^\infty P[T_1 < t] \cdot \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t}) \cdot \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \int_0^\infty \mu e^{-\mu t} dt - \int_0^\infty \mu e^{-(\mu+\lambda)t} dt \\ &= 1 - \frac{\mu}{\mu+\lambda} \cdot \int_0^\infty (\mu+\lambda) e^{-(\mu+\lambda)t} dt \\ &= 1 - \frac{\mu}{\mu+\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \end{aligned}$$

3. Debemos encontrar una expresión para

$$P[X = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} < t]$$

$$\begin{aligned} P[X < t] &= 1 - P[X > t] \\ &= 1 - (P[X_1 > t] \cdot P[X_2 > t] \dots \cdot P[X_n > t]) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(t)) \end{aligned}$$

Para el caso exponencial tenemos que:

$$\begin{aligned}
P[X < t] &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i(t)}) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - 1 + e^{-\lambda t}) \\
&= 1 - e^{-(\sum_{i=1}^n \lambda t)} \\
&= 1 - e^{-n\lambda t}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow X \rightsquigarrow \exp(n\lambda)$$

4. Llamamos λ_1 y λ_2 a los parámetros de las v.a. Poisson:

$$\begin{aligned}
P[X_1 + X_2 = N] &= \sum_{i=0}^{\infty} P[X_1 + X_2 = N | X_2 = i] \cdot P[X_2 = i] \\
&= \sum_{i=0}^N P[X_1 = N - i] \cdot P[X_2 = i] \\
&= \sum_{i=0}^N \frac{\lambda_1^{N-i} e^{-\lambda_1}}{(N-i)!} \cdot \frac{\lambda_2^i e^{-\lambda_2}}{i!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{N!} \cdot \sum_{i=0}^N \frac{N!}{(N-i)! i!} \lambda_1^{N-i} \lambda_2^i \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} (\lambda_1 + \lambda_2)^N}{N!}
\end{aligned}$$

Problema 2

1. Dado que la esperanza de una exponencial es el inverso multiplicativo del parámetro, una persona racional que no le guste esperar elegiría la fila 1 porque $\lambda > \mu$.

2. Dado que elegí la ventanilla 1, existen 2 configuraciones en la que me voy último:

- Se vaya primero el de la otra fila $\left(P_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)$.
- Se vaya primero el de mi fila y además el de la otra fila se vaya antes que yo $\left(P_2 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$.

Entonces, la probabilidad es:

$$P(\text{irse último}) = P_1 + P_2$$

3. Llámemos a las personas que están en la fila 1 como a y b (a antes que b) y a la persona antidiéndose en la fila 2 como c . Con esto, existen 3 configuraciones posibles para que yo me vaya último:

- $a \rightarrow b \rightarrow c$ $P_1 = \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^2\right)$
- $a \rightarrow c \rightarrow b$ $P_2 = \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^2 \cdot \frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)$
- $c \rightarrow a \rightarrow b$ $P_3 = \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^2 \cdot \frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)$

Finalmente, la probabilidad buscada es:

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

Problema 3

- R = Respuesta correcta a la pregunta.
- A_1 = Respuesta dada por el ayudante 1 a la pregunta.
- A_2 = Respuesta dada por el ayudante 2 a la pregunta.

Tenemos que calcular:

$$P(R = d | A_1 = d \wedge A_2 = d) = \frac{P(A_1 = d \wedge A_2 = d | R = d) \cdot P(R = d)}{P(A_1 = d \wedge A_2 = d)}$$

Pero

$$\begin{aligned} P(A_1 = d \wedge A_2 = d | R = d) &= P(A_1 \text{ diga la verdad}) \cdot P(A_2 \text{ diga la verdad}) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \\ P(R = d) &= \frac{1}{9} \\ P(A_1 = d \wedge A_2 = d) &= \sum_{r=a}^i P(A_1 = d \wedge A_2 = d | R = r) \cdot P(R = r) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{9} + \sum_{\substack{r=a \\ r \neq d}}^i \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} P(R = d | A_1 = d \wedge A_2 = d) &= \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{1440} + \frac{1}{15}} \\ &= \frac{96}{97} \end{aligned}$$

Problema 4

1. Si cobro 0 por la entrada la probabilidad que un habitante en particular asista al estadio será 1. Esto implica que tendré un estadio lleno pero sin ganancias.

Si cobro un precio muy alto la probabilidad será cercana a 0 por lo que tampoco tendré ganancias (dado que no irá gente).

El trade-off es, precio muy alto implica más ganancias por persona pero menos asistencias.

2. Si cobro un precio p cada persona asistirá con probabilidad e^{-p} , entonces, sea X la cantidad de personas que asisten al estadio:

$$P[X = k] = \frac{N!}{k! \cdot (N - k)!} e^{-pk} (1 - e^{-p})^{N-k}$$

Claramente esto cobra sentido sólo para valores de $k \leq N$.

3. Dado que la asistencia al estadio sigue una binomial se tendrá que el ingreso esperado será la esperanza de la binomial por el precio cobrado. Esto es:

$$E_p[\text{Ingresos}] = N \cdot e^{-p} \cdot p$$

4. Para lograr esto debemos derivar e igualar a 0 (cuidando que el precio no sea negativo):

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_p[\text{Ingresos}]}{\partial p} &= N \cdot e^{-p} N \cdot e^{-p} \cdot p = 0 \\ &\Rightarrow P = 1\end{aligned}$$

De esta forma el ingreso máximo será entonces:

$$E_{p^*}[\text{Ingresos}] = N \cdot e^{-1}$$