



Universidad de Chile

Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa

Profs: R. Epstein, J. Correa

Auxs: S. Astroza, C. Thraves, J. Gacitúa, R. Lagos

Clase Auxilliary 1, 18 de Marzo de 2009

## Repaso Probabilidades

### Problema 1

1. Demuestre que la variable aleatoria exponencial tiene pérdida de memoria.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

2. Demuestre que si

$$T_1 \longrightarrow \exp(\lambda)$$

$$T_2 \longrightarrow \exp(\mu), \quad \text{se tiene que:}$$

$$P(T_1 < T_2) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$$

3. Sean  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  variables aleatorias iid. Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria:

$$\mathbf{X} \longrightarrow \min(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

4. Encuentre la distribución de probabilidad de una variable aleatoria que es la suma de 2 variables aleatorias que siguen distribuciones de Poisson independientes.

### Problema 2

Considere una oficina de correos con 2 ventanillas de atención. Cuando usted llega, encuentra que hay 2 personas atendándose uno en cada ventanilla. La atención en la ventanilla 1 demora un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro  $\lambda[\frac{1}{u.t.}]$  mientras la atención en la ventanilla 2 demora un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro  $\mu[\frac{1}{u.t.}]$  ( $\lambda > \mu$ )

1. ¿En cuál ventanilla se colocaría ?
2. ¿Cual es la probabilidad de que usted sea el último en irse de la oficina? (suponga que una vez que elige la fila no puede cambiarse)
3. Suponga ahora que cuando usted llega descubre que hay 2 personas en la fila frente a la ventanilla 1 y sólo 1 persona en la ventanilla 2. Sin pensarlo, usted se pone en la fila más corta. ¿Cuál es la probabilidad de que usted sea el último en irse de la oficina? (suponga que una vez que elige la fila no puede cambiarse)

### Problema 3

Usted se encuentra dando un control de su ramo preferido el cuál está siendo cuidado por 2 ayudantes. El primer ayudante dice la verdad  $\frac{3}{4}$  de las veces. Por su parte el segundo de los ayudantes dice la verdad  $\frac{4}{5}$  de las veces. La pregunta 2 tiene 9 alternativas, y usted no sabe cuál es la respuesta correcta (pero los ayudantes SÍ SABEN). Por esto, usted ha decidido preguntarle a los 2 ayudantes su opinión respecto a la alternativa correcta. Si ambos afirman que la respuesta correcta es la (d), ¿Cuál es la probabilidad que efectivamente ésa sea la respuesta correcta a la pregunta (es decir, que ambos ayudantes estén diciendo la verdad)?.

Hint : La probabilidad a priori de que la respuesta correcta sea cualquiera de las alternativas es  $\frac{1}{9}$ .

### Problema 4

En el aislado pueblo de Gorepani viven  $N$  habitantes. En los próximos días el equipo local se juega la posibilidad de clasificar al campeonato nacional de basketball en un trascendental partido. Las posibilidades de clasificación no son muchas, por lo cual la decisión del precio  $p$  a cobrar por cada entrada al espectáculo no es trivial. Si se cobra un precio muy alto, poca gente podría acudir al espectáculo.

Según estimaciones realizadas con antecedentes históricos, se sabe que si se cobra un precio  $p$  por la entrada, entonces un individuo cualquiera del pueblo, independiente de todo lo demás, acude con probabilidad  $e^{-p}$  al estadio. Esta probabilidad es la misma para todos los pobladores del pueblo. Suponga que la capacidad del estadio es mayor a  $N$ , es decir, cabe toda la gente del pueblo dentro de él. Además, sólo gente del pueblo acude al estadio.

1. ¿Qué pasa si se cobra un precio cero (gratis) por la entrada?. ¿Y si se cobra un precio muy grande?. Explique el trade-off involucrado en el problema.
2. ¿Si se cobra un precio  $p$  por la entrada al estadio, ¿Cuál es la probabilidad de que asistan  $k$  personas al estadio?.
3. ¿Cuál es el valor esperado del ingreso monetario, si se cobra un precio  $p$ ?
4. ¿Qué precio se debe cobrar si se desea maximizar el valor esperado del ingreso monetario?. ¿Cuál es el ingreso monetario esperado máximo?.