

IN3701 – Optimización
Última Auxiliar
25 de Junio de 2009

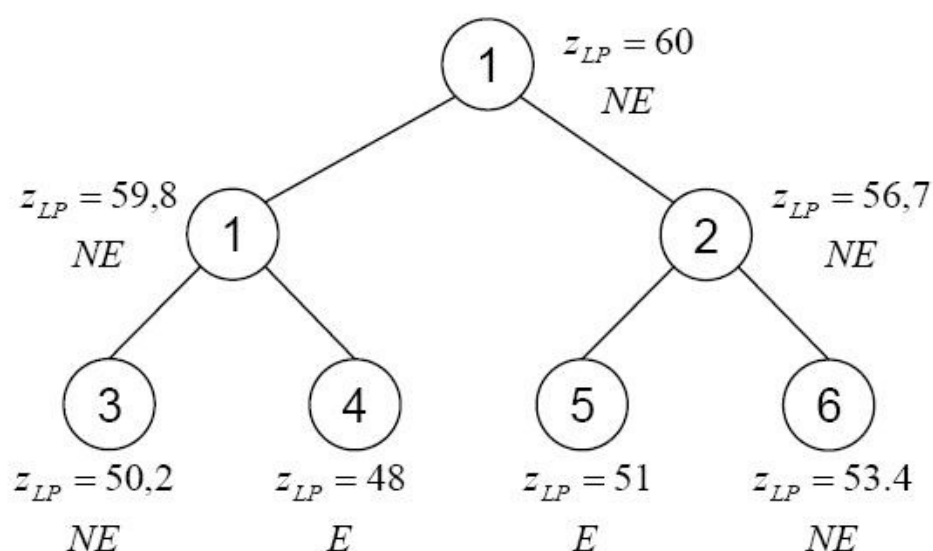
Problema 1 (un problema corto para que entiendan el algoritmo B&B)

Resolver el siguiente problema usando el algoritmo Branch & Bound:

$$\begin{aligned} \min z &= -5x_1 - 8x_2 \\ \text{s.a. } x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{ enteros} \end{aligned}$$

Problema 2 (un problema más conceptual tipo control)

Un problema de programación entera se está resolviendo utilizando el algoritmo de *Branch and Bound*. A continuación se presenta el árbol de problemas que se tiene hasta la iteración actual. El primer problema representa la relajación lineal del problema entero original y el resto corresponde a sus ramificaciones. Para cada sub-problema se tiene el valor óptimo de la función objetivo. Además, cada sub-problema se identifica con *E* si su solución es entera (factible para el problema original) y *NE* con en caso contrario.



- i. ¿El árbol anterior corresponde a un problema de maximización o a uno de minimización? ¿Cuál es el incumbente hasta la iteración actual?
- ii. En las siguientes iteraciones, ¿qué nodos seguiría ramificando y qué nodos no seguiría ramificando? Explique.
- iii. De una cota superior y una inferior para el valor óptimo de la función objetivo del problema entero original según la información que conoce hasta la iteración actual. Suponga que los coeficientes de la función objetivo son enteros.
- iv. Si la función objetivo original fuese $3x_1 + 6x_2$, ¿Qué podría decir sobre el valor de la función objetivo óptimo en el problema entero?

Problema 3

Sea el problema:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s. a} & g_i(x) \leq 0 \end{array}$$

¿Que hipótesis se deben pedir para que el cumplimiento de las condiciones de KKT para un punto x^* garantice que dicho punto es mínimo global del problema?

Problema 4

A partir de las condiciones de KKT verifique que un punto interior no puede ser óptimo en un problema de programación lineal con función objetivo no nula. ¿Un punto interior puede ser óptimo en un problema de programación no lineal?

Pauta

Problema 1

Lo primero que debemos hacer es inicializar el incumbente en $\bar{z} = \infty$ e inicializar la lista de problemas pendientes con la relajación lineal del problema:

$$\begin{aligned} (P0) \min z &= -5x_1 - 8x_2 \\ \text{s.a. } x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Como es el único problema que hay en la lista, lo resolvemos obteniendo la siguiente solución óptima: $z_0 = -41,25$; $x_1 = 2,25$ y $x_2 = 3,75$.

Notamos que las 2 variables son fraccionarias por lo que podemos tomar cualquiera de ellas como variable de ramificación. (Podríamos escoger cualquiera)

Escojamos la variable x_2 para ramificar generándose así los siguientes problemas:

$$\begin{aligned} (P1) \min z &= -5x_1 - 8x_2 \\ \text{s.a. } x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 45 \\ x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P2) \min z &= -5x_1 - 8x_2 \\ \text{s.a. } x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 45 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tenemos ahora que la lista esta compuesta por 2 problemas pendientes: $L = \{(P1), (P2)\}$. Sin embargo, aún no encontramos una solución entera por lo que no actualizamos el incumbente.

Resolviendo primero (P1), se tiene que $z_1 = -41$; $x_1 = 1,8$ y $x_2 = 4$, que tampoco es solución entera por lo que ramificamos nuevamente por variable x_1 , dando origen a los problemas:

$$\begin{aligned} (P3) \min z &= -5x_1 - 8x_2 \\ \text{s.a. } x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 45 \\ x_2 &\geq 4 \\ x_1 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P4) \min z &= -5x_1 - 8x_2 \\ \text{s.a. } x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 45 \\ x_2 &\geq 4 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tenemos como problemas pendientes $L = \{(P2), (P3), (P4)\}$ y aun ninguna solución entera. Escogemos (P3) para ser resuelto obteniendo que es infactible. Esto significa que eliminamos a (P3) sin ser ramificado.

Ahora es necesario escoger entre los elementos de la lista pendientes $L = \{(P2), (P4)\}$. Escogemos (P4) para ser resuelto obteniendo que $z_4 = -40,55$; $x_1 = 1$ y $x_2 = 4,44$. Nuevamente no tenemos una solución entera y por lo tanto debemos ramificar según variable x_2 dando paso a los siguientes problemas:

$ \begin{aligned} (P5) \min z &= -5x_1 - 8x_2 \\ \text{s. a. } x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 45 \\ x_2 &\geq 4 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} (P6) \min z &= -5x_1 - 8x_2 \\ \text{s. a. } x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 45 \\ x_2 &\geq 4 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_2 &\geq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} $
---	---

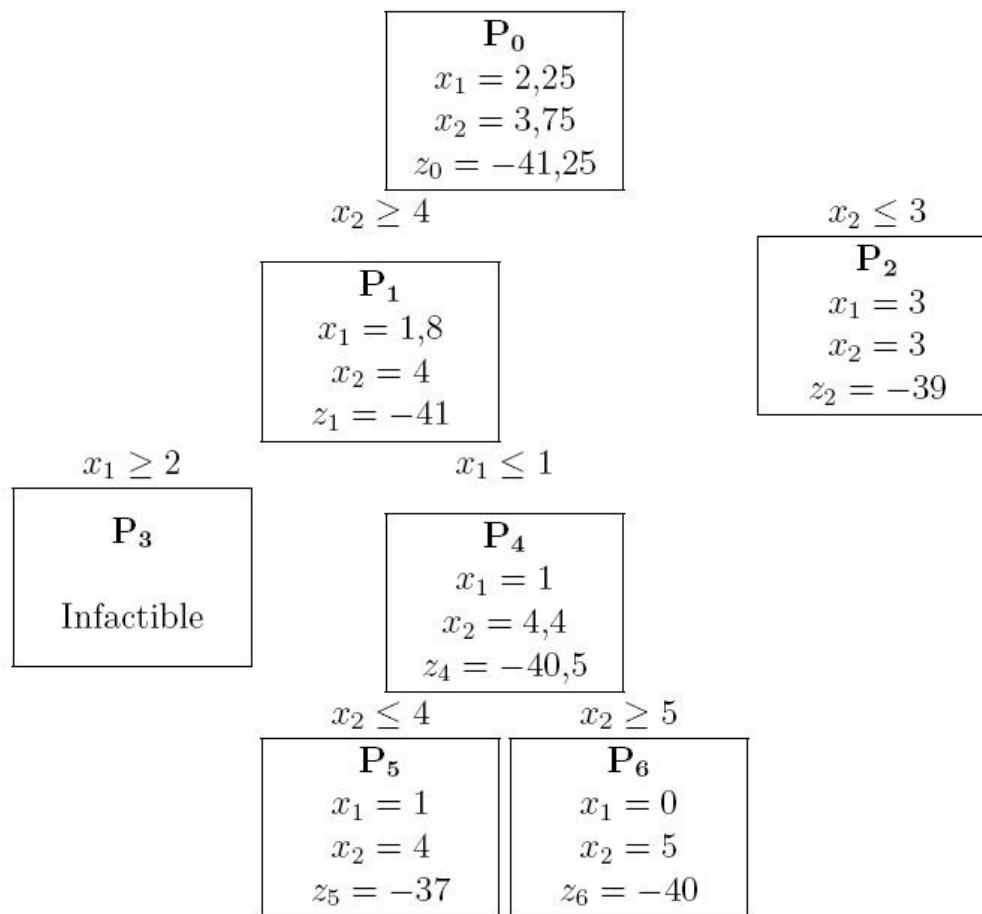
Notamos que el espacio factible de (P6) es solo el punto ($x_1 = 0, x_2 = 5$) y el de (P5) es el segmento de recta que une el punto (0, 4) con el punto (1, 4). Si se resuelve (P5) se obtiene la primera solución entera: $z_5 = -37$; $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$ por lo que actualizamos el incumbente a $\bar{z} = -37$.

Ahora la lista es $L = \{(P2), (P6)\}$. Resolviendo (P6) se tiene que $z_6 = -40$; $x_1 = 0$ y $x_2 = 5$, que es una solución entera mejor que la anterior por lo que actualizamos el incumbente: $\bar{z} = -40$.

Resolviendo finalmente el último problema de la lista: (P2) se obtiene que $z_2 = -39$; $x_1 = 3$ y $x_2 = 3$, que es una solución entera peor que la del incumbente por lo cual no es necesario ramificar.

Como no quedan problemas en la lista, hemos encontrado que el óptimo entero del problema viene dado por $\bar{z} = -40$; $x_1 = 0$ y $x_2 = 5$.

Observación: Si la solución de P2 hubiera tenido $z_2 = -39$ y solución fraccionaria tampoco hubiéramos ramificado porque hubiese tenido un valor de la función objetivo peor que la del incumbente por lo que todos los problemas hijos tendrían una solución peor que la mejor que ya tenemos.



Problema 2

i. Un problema de maximización.

¿Por qué? En un problema de maximización partimos con incumbente $\bar{z} = -\infty$, y se tiene que la solución del problema relajado (P0) es la cota superior para la solución del problema entero, y que en cada iteración la función objetivo va bajando de valor (siempre que hablemos de un problema de maximización, en general se dice que la función objetivo empeora su valor). En este caso vemos que la función objetivo cada vez baja de valor en las iteraciones de B&B, por ende, se trata de un problema de maximización.

Recordar que el incumbente es el mejor valor entero factible que se lleva hasta la iteración actual. En este caso tenemos que las únicas soluciones enteras son el nodo 4y 5, por lo que nos quedamos con el nodo 5 pues tiene el mejor valor. El incumbente es 51.

ii. ¿Cuándo se poda una rama del árbol? Se poda siempre que las ramas sean infactibles y/o no mejoren el valor del incumbente. Luego sólo se ramifica el nodo 6,

ya que el 3 y 4 tienen valores bajo el incumbente. Además el nodo 4 ya arroja una solución entera. El nodo 5, en tanto, arroja solución entera (nuestro actual incumbente). Mientras que el nodo 6, si bien no posee una solución entera, el valor de la FO es mayor que el incumbente.

iii. La cota inferior en un problema de maximización es el valor actual del incumbente (en un problema de minimización corresponde a una cota superior, es decir en general el incumbente es el peor valor que uno puede encontrar para la función objetivo).

La cota superior (el mejor valor que podemos obtener) está dado por el mejor de los valores que se pueden obtener en las ramas que quedan por brotar (ramificar). En este caso solo tenemos un nodo por ramificar y el mejor valor de la función que podemos tener es 53, que es el mejor valor que se podría obtener del nodo 6.

iv. Si el valor de la función objetivo en el óptimo fuese $3x_1 + 6x_2 = 3(x_1 + 2x_2)$, es múltiplo de 3, la solución óptima será $z^* = 51$, pues no hay otro múltiplo de 3 entre $[51, 53]$.

Problema 3

- x^* mínimo local tal que se cumple la condición de regularidad en x^* . Para funciones diferenciables se tiene que x^* es regular si las restricciones de (P) si los vectores gradientes de las restricciones activas en x^* son l. i.
- f y g_i son de clase C^1
- f convexa y región factible convexa.

Problema 4

Verifiquemos que un punto interior no puede ser óptimo de un problema lineal:

Sea un PL donde se quiere optimizar $f(x) = c^t x$ lineal en la región factible S convexa. Sea x^* un punto del interior de S candidato a ser óptimo global de PL. Las condiciones necesarias de KKT aplicadas a x^* son:

$\exists \mu_i \geq 0, \forall i$ t. q.:

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(x^*) &= 0 \quad (*) \\ \mu_i g_i(x^*) &= 0, \forall i = 1, \dots, m \quad (HC) \end{aligned}$$

Para x^* todas las restricciones son NO activas, puesto que es un punto interior, luego por las condiciones de Holgura Complementaria, se tiene que $\mu_i = 0 \forall i$.

Luego la ecuación (*) también debe cumplirse para que x^* sea el óptimo, entonces:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(x^*) = \nabla f(x^*) = 0$$

Por otro lado se tiene que:

$$\nabla f(x^*) = \vec{c}$$

Con lo que se concluye que:

$$\nabla f(x^*) = \vec{c} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

Lo que es una contradicción, pues supusimos que f es no nula. Por lo tanto un punto interior no puede ser un punto óptimo de un problema de optimización lineal con función objetivo NO nula.

Ahora analizamos el caso de un problema no lineal:

Notar que la condición de que $\mu_i = 0 \forall i$, no cambia y por ende $\nabla f(x^*) = 0$, ahora con f no lineal tampoco cambia. Lo anterior se tiene si y solo si x^* es un punto estacionario de f , por lo tanto un punto interior si puede ser óptimo de un problema de Optimización No Lineal.