INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Daniel Espinoza, Gonzalo Romero

Auxiliares: Víctor Bucarey, Nelson Devia, Jocelyn González, Fernando Solari

IN3701 – Optimización
Auxiliar 12
17 de Junio de 2009

Problema 1

En una pequeña villa hay n hombres solteros, n mujeres solteras y m "formadores de matrimonios". Cada formador conoce un subconjunto de los hombres y de las mujeres y puede formar hasta b_i matrimonios entre cualquier par hombre-mujer que conozca. Asumiendo que los matrimonios son heterosexuales y que cada persona puede casarse a lo más una vez, queremos determinar el máximo número de matrimonios que son posibles.
Muestre que la respuesta se puede encontrar resolviendo un problema de máximo flujo. ¿Por qué es bueno poder modelar problemas grandes como un problema de flujo en redes?

Problema 2

a) Escriba un algoritmo A que permita averiguar si existe un camino desde el nodo s a t que pase por los nodos a y b en cualquier orden.
b) ¿Cómo usaría el algoritmo anterior para encontrar la ruta mínima entre los nodos s y t que pase por a y b?

Problema 3

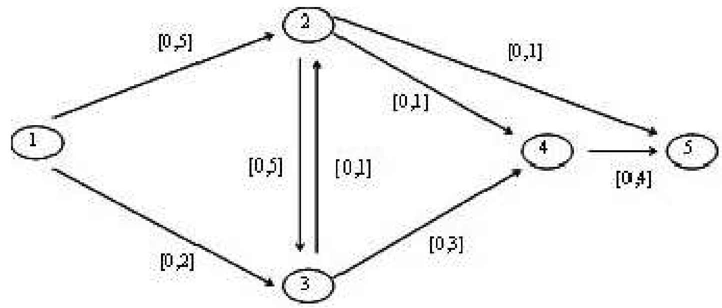
a) Ordene en términos de crecimiento asintótico (según O(g)) las siguientes funciones: n^3; log(n!); $2^{\log(n)}$; n^{73}; n!; log(n); 1.
b) Dado f,g: $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}_+$ Demuestre que $f(n) + g(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$.
c) Explique el concepto de certificado polinomial y justifique que $P \subset NP$, $NPcom \subset NP$, $P \neq NP$. ¿Qué pasaría si $\exists p \in NPcom$ que pueda resolverse en tiempo polinomial?

Problema 4

Muestre con un ejemplo por qué el algoritmo de Dijkstra para rutas más cortas puede no servir si hay arcos con costos negativos.

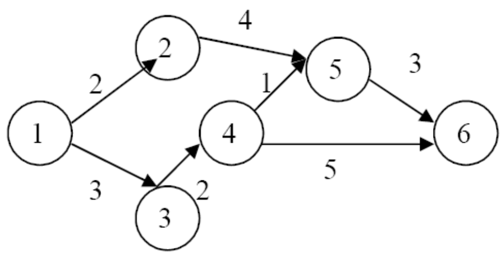
Problema 5

Considere la red de la figura, donde se indica las cotas inferior y superior de flujo de cada arco [bij ; cij]. Aplique el algoritmo de Ford-Fulkerson para encontrar el máximo flujo desde s = 1 hasta t = 5. Verifique que se cumple el teorema max flujo/min-corte en tal caso.



Problema 6

Determine la ruta más corta del nodo 1 a todos los demás para la siguiente red aplicando el algoritmo de Dijkstra.



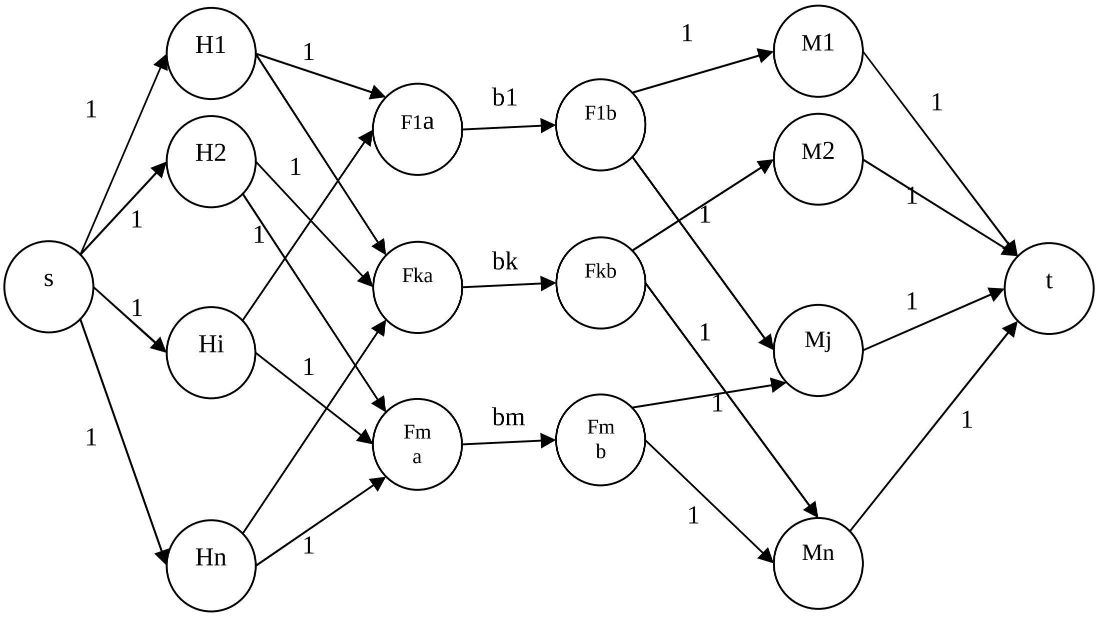
Problema 7

La Universidad de la Cordillera está organizando un nuevo Magíster en Investigación de Operaciones para el año 2007 y para ello ha definido una serie de criterios para seleccionar a los 40 alumnos del total de 200 postulantes.
Los 200 postulantes han pasado por un examen de admisión del que han salido con un puntaje Pi para cada postulante i del conjunto I.
Dado que la Universidad quiere cambiar su perfil, ha decidido fomentar la participación de mujeres y de personas nacidas fuera de la Región Metropolitana, y ha establecido entonces que al menos un 25% de los seleccionados deben ser mujeres y un 40% deben ser de Regiones. Para esto, se han definido los subconjuntos M que incluye a los postulantes que son mujeres, y R que contiene a los postulantes de Regiones.
Como se quiere priorizar a los postulantes con mejor puntaje, se ha decidido que el 5% con mejor puntaje en el examen de admisión tiene que ser obligatoriamente elegido y, además, dados cualesquiera 2 postulantes con la misma situación de género (hombre/mujer) y lugar de nacimiento (RM/Regiones), no puede ocurrir que uno de ellos sea elegido si tiene puntaje menor que el otro (esta condición rige para postulantes que comparten ambas condiciones). Para esto se han definido los subconjuntos Cp, p=1,2,3,4; con los postulantes que comparten alguna combinación de ambos atributos.
Por otra parte, se pretende que el último de los elegidos (según el ranking de puntajes), tenga el mejor ranking (o, equivalentemente, el mayor puntaje) posible.
Diseñe un modelo de programación lineal entera que permita a la Universidad de la Cordillera elegir a sus 40 alumnos para el nuevo Magíster, respetando todas las condiciones solicitadas.

IN3701 – Optimización
Pauta Auxiliar 12
17 de Junio de 2009

Problema 1

Modelando a cada persona como un nodo y las relaciones "a conoce a b" como arcos con capacidad 1, se forma la siguiente red:



Donde los nodos s y t son ficticios y los arcos que inciden en ellos tienen capacidad 1.

Luego, el problema queda como uno de máximo flujo sobre esta red:

$$\underset{s.a.}{Max}\ F$$

$$\sum_{j\in O(i)} f_{ij} - \sum_{j\in D(i)} f_{ji} = \begin{cases} F & si\ i = s \\ -F & si\ i = t \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

$$f_{ij}, F \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$$

Problema 2

a)
Una alternativa es basarse en el algoritmo de marcado:
Llamaremos M_{pq} a la respuesta del algoritmo entre p y q, es decir, M_{pq} entrega "sí" si existe un camino entre los nodos p y q.
Definimos: E conjunto de nodos etiquetados y R conjunto de nodos revisados.

M_{pq} :

Inicialización:
$E = \{p\}$
$R = \phi$
Repetir
Si $E = \phi$ terminar (entrega no)
Si $q \in E$ terminar (entrega sí)
Escoger nodo $i \in E$
$\forall j \notin R / (i, j) \in A$, $E = E \cup \{j\}$
$E = E / \{i\}$
$R = R \cup \{i\}$

Luego basta con aplicar el algoritmo anterior:
A :
Si $M_{sa}, M_{ab}, M_{bt} = sí$, entrega sí
Si $M_{sb}, M_{ba}, M_{at} = sí$, entrega sí
entrega no

b)
Basta con aplicar el algoritmo una vez:
Si entrega "no", entonces la ruta mínima no existe, entrega null
Si entrega "sí":
Si $M_{sa}, M_{ab}, M_{bt} = sí$, aplicar Dijkstra entre s-a, a-b, y b-t, entrega $D^1_{st} = D_{sa} + D_{ab} + D_{bt}$
Si $M_{sb}, M_{ba}, M_{at} = sí$, aplicar Dijkstra entre s-b, b-a, y a-t, entrega $D^2_{st} = D_{sb} + D_{ba} + D_{at}$
Entrega $Min\left\{D^1_{st}, D^2_{st}\right\}$

Problema 3

a)
En orden creciente queda: $1 \leq \log(n) \leq 2^{\log(n)} \leq \log(n!) \leq n^3 \leq n^{73} \leq n!$
Los que no son triviales pueden obtenerse mediante el límite $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$

b)
Claramente $f(n) + g(n) \geq \max\{f(n), g(n)\}$, ya que ambas son funciones positivas, además $f(n) + g(n) \leq 2\max\{f(n), g(n)\}$, ya que, sin pérdida de generalidad, si $g(n) \leq f(n) \Rightarrow f(n) + g(n) \leq 2f(n)$.
Luego $\max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n) \leq 2\max\{f(n), g(n)\}$
y $f(n) + g(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$

c)

Certificado polinomial:

Un problema que está en NP no puede ser resuelto en tiempo polinomial, sin embargo, dada una solución factible para ese problema, se puede chequear si es óptima o no en tiempo polinomial.

$P \subset NP$: Todo problema en P, dada una solución factible, ésta puede certificarse en tiempo polinomial. En el peor de los casos la certificación es la misma resolución, la que tarda tiempo polinomial, ya que el problema está en P.

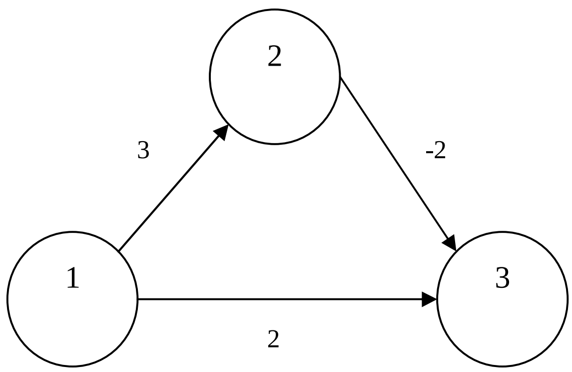
$NPcom \subset NP$: Por definición de $NPcom$: $p \in NPcom$ si $p \in NP$ y $\forall q \in NP, q \leq_p p$, es decir, que todo problema en NP puede reducirse a p en tiempo polinomial.

$P \neq NP$: Existen problemas en NP que no pueden ser resueltos en tiempo polinomial.

Si $\exists p \in NPcom$ que pueda ser resuelto en tiempo polinomial, entonces sabiendo que todo problema en NP se puede reducir a este problema p en tiempo polinomial, y que p puede resolverse en tiempo polinomial, entonces, todo problema en NP se podría resolver en tiempo polinomial, llegando a que $P = NP$

Problema 4

Ejemplo clásico:



<u>Dijkstra:</u>
Nodo 1:
- Arco (1,2): => d2=3, p2=1
- Arco (1,3): => d3=2, p3=1

Nodo 3:
- No hay arcos

Nodo 2:
- No hay arcos hacia nodos no revisados

FIN
Ruta encontrada: 1-3 con costo 2
Ignora la ruta 1-2-3 con costo 1

Problema 5
FORD & FULKERSON

Flujo inicial F=0, f(ij)=0
Camino 1-2-5:
    Se puede enviar 1
    f(1,2)=f(2,5)=1, F=1
Camino 1-2-4-5
    Se puede enviar 1
    f(1,2)=2, f(2,4)=f(4,5)=1, F=2
Camino 1-3-4-5
    Se puede enviar 2
    f(1,3)=f(3,4)=2,f(4,5)=3, F=4
Camino 1-2-3-4-5
    Se puede enviar 1
    f(1,2)=3,f(2,3)=1,f(3,4)=3,f(4,5)=4, F=5
No hay más caminos aumentantes
FIN

- Notar que los caminos encontrados y su orden son arbitrarios, por lo que se puede llegar a distintas configuraciones para el vector f*(i,j), pero siempre se llegará al mismo F*.

Problema 6
DIJKSTRA

Nodo 1:
    Arco (1,2): => d2=2, p2=1
    Arco (1,3): => d3=3, p3=1
Nodo 2:
    Arco (2,5): => d5=6, p5=2
Nodo 3:
    Arco (3,4): => d4=5, p4=3
Nodo 4:
    Arco (4,5): => nada
    Arco (4,6): => d6=10, p6=4
Nodo 5:
    Arco (5,6): => d6=9, p6=5
Nodo 6:
    No hay arcos
FIN
Ruta encontrada: 1-2-5-6 con costo 9

Problema 7

1. Hay al menos 2 formas de modelar el problema.
   Supuesto: La lista de puntajes esta ordenada de manera decreciente. i.e. $P_1 > P_2 > \ldots > P_{200}$

   - Variables de Decisión
     $X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si el postulante } i \text{ es elegido.} \\ 0 & \sim \end{cases}$
     Y = variable auxiliar que almacena **la posición** del último postulante elegido. (Z = variable auxiliar que almacena el puntaje del último postulante elegido.)

     Parámetros y conjuntos:
     P_i = puntaje obtenido por el postulante i.
     I = conjunto que contiene el total de postulantes.
     M = subconjunto de postulantes que son mujeres.
     R = subconjunto de postulantes que son de regiones.

   - Restricciones

     a) El total de postulantes elegidos debe ser 40

     $$\sum_i X_i = 40$$

     b) Se deben elegir al menos 10 postulantes mujeres o 25 %

     $$\sum_{i \in M} X_i = 10$$

     c) Se deben elegir al menos 16 postulantes de regiones o 45 %

     $$\sum_{i \in R} X_i = 16$$

     d) Siempre que hayan dos postulantes con igual combinación de atributos se debe elegir al de mayor puntaje primero

     $$X_i > X_j \quad \forall p \quad \forall i < j \quad i, j \in C_p$$

     e) El 5 % de los postulantes con mejor puntaje debe ser elegido obligatoriamente

     $$X_i = 1 \quad \forall i \in 1, .., 10$$

     f) Definición de la variable auxiliar

     $$iX_i \leq Y \quad \forall i$$

     $$(Z \leq X_i P_i + (1 - X_i)M \quad \forall i, M >> 1)$$

     g) Naturaleza de las variables

     $$X_i \in [0, 1]$$
     $$Y \in \mathbf{Z}$$
     $$(Z \in \mathbf{Z})$$

- Función Objetivo

$$Min \quad Y$$

$$(Max \quad Z)$$

Dudas y/o Comentarios a
edevia7@hotmail.com