INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Daniel Espinoza, Gonzalo Romero

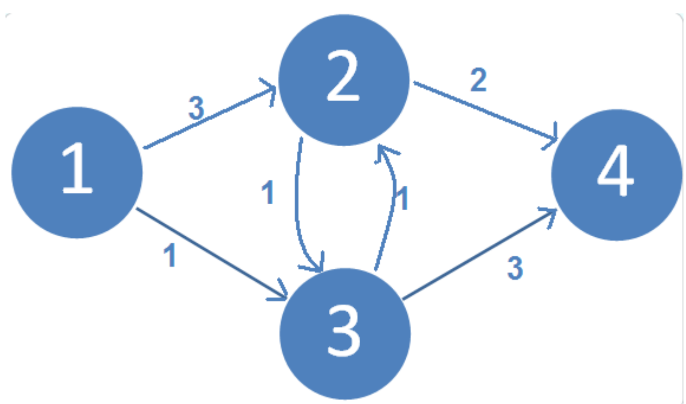
Auxiliares: Víctor Bucarey, Nelson Devia,
Jocelyn González, Fernando Solari

IN3701 – Optimización
Auxiliar 10
4 de Junio de 2009

Problema 1
Escriba el problema general de Flujo a costo Mínimo.

Problema 2
Suponga que para la próxima tarea de un ramo existen J preguntas e I integrantes del grupo. Además se espera que el puntaje que obtenga el alumno i haciendo la pregunta j es a_{ij}. Por otra parte, como no todos los estudiantes saben toda la materia, para cada estudiante sólo existen ciertas preguntas que puede realizar y, debido a que ninguno tiene mucho tiempo, máximo resolverá una pregunta.
El problema consiste en maximizar el puntaje a obtener en la prueba. Modele usando flujo en redes.

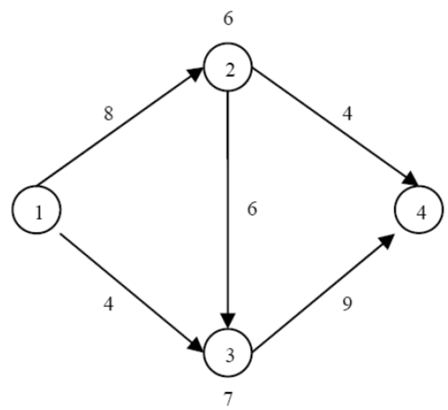
Problema 3
Resuelva el Problema de Rutas Mínimas del siguiente Grafo desde el nodo 1 al nodo 4 utilizando el Algoritmo de Bellman-Ford y luego utilizando el Algoritmo de Dijkstra.



Problema 4

En la siguiente red se han incluido capcaidades en los nodos.

a) Readapte la red para poder aplicar Ford y Fulkerson.
b) Resuelva el Problema.



Problema 5

Muestre que en un Grafo G(V,E) conexo, el número de nodos con grado impar es par.

Pauta Auxiliar 10
4 de Junio de 2009

Resumen

Un ***Grafo NO dirigido*** G(V,E) es un conjunto de V ***nodos*** (|V|=n) y ***arcos*** E (|E|=m) que son pares no ordenados (ie, no importa el orden).
En un ***Grafo Dirigido*** G(V,E) E es un conjunto tal que $E \subseteq V * V$, luego sí importa el orden.
Un arco(i,j) es ***incidente*** a i y j.
El ***Grado*** de un nodo i es el número de arcos que inciden a i.
Un ***Paseo*** se interpreta como un recorrido por nodos que están conectados por arcos.
Un ***Camino*** es un paseo tal que no se repite el paso por un nodo.
Un ***Ciclo*** es un camino tal que el primer nodo coincide con el último.
Un Grafo es ***Conexo*** si existe un camino del nodo i al nodo j $\forall i, j \in V$.
Para un grafo NO dirigido y $U \subset V$ se define el **Corte** de U como

$$\delta(U) = \{\{i,j\} \in E : i \in U, j \in U^c\}$$

Para un Grafo dirigido y $U \subset V$ se define el **Corte Saliente** de U como

$$\delta^+(U) = \{\{i,j\} \in E : i \in U, j \in U^c\}$$

Para un Grafo dirigido y $U \subset V$ se define el **Corte Entrante** de U como

$$\delta^-(U) = \{\{i,j\} \in E : j \in U, i \in U^c\}$$

Dado un Grafo G(V,E), $f \in \mathbb{R}_+^E$, $d \in \mathbb{R}^V$, f es un **Flujo** en G satisfaciendo d si

$$\sum_{e \in \delta^+(V)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(V)} f_e = d_v \quad \forall v \in V$$

Un Grafo G(V,E) es un **árbol** si es conexo y no contiene ciclos.

Problema 1

El problema General de Flujo a costo mínimo es el siguiente:

$$Min \sum_{(i,j) \in A} a_{ij} x_{ij}$$

sa

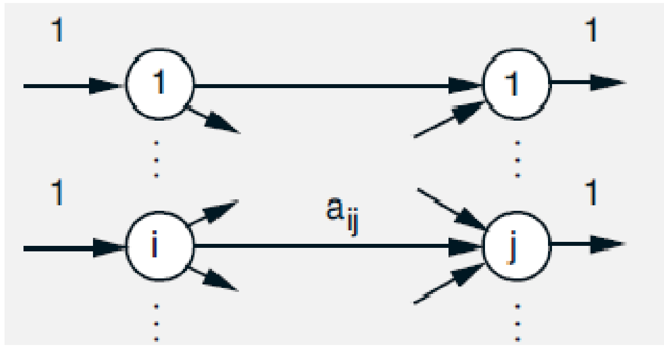
$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = s_i \qquad \forall i \in N$$

$$b_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A$$

Problema 2

Se modelará de la siguiente manera:

PERSONAS PREGUNTAS



En primer lugar, se define el conjunto de arcos posibles:

$$\mathcal{A} = \{(i,j): j = j(i)\}$$

Luego, la formulación del problema queda:

$$Max \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij} x_{ij}$$

sa

$$\sum_{\{i|(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in J$$

$$0 \le x_{ij} \le 1 \qquad \forall (i,j) \in \mathcal{A}$$

Problema 3

Bellman-Ford:

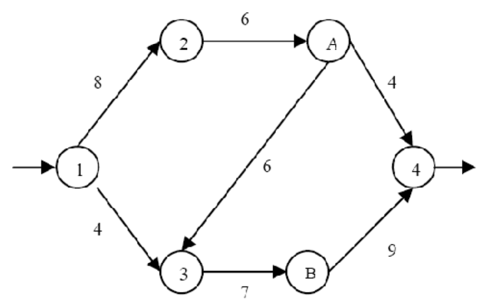
Iteración	**Lista de Candidatos**	**Etiquetas (d1,d2,d3,d4)**	**Nodo que sale**
1	{1}	(0,∞, ∞,∞)	1
2	{2,3}	(0,3,1,∞)	2
3	{3,4}	(0,3,1,5)	3
4	{4,2}	(0,2,1,4)	4
5	{2}	(0,2,1,4)	2
6	{ϕ}	(0,2,1,4)	STOP!

Dijkstra:

Iteración	**Lista de Candidatos**	**Etiquetas (d1,d2,d3,d4)**	**Nodo que sale**
1	{1}	(0,∞, ∞,∞)	1
2	{2,3}	(0,3,1,∞)	3
3	{2,4}	(0,2,1,4)	2
4	{4}	(0,2,1,4)	4
5	{ϕ}	(0,2,1,4)	STOP!

Problema 4

a) Para F&F no se deben tener capacidades, luego se inventan dos nodos artificiales y el grafo queda:



b) Para resolver se comienza con un flujo factible (flujo cero para todos los arcos) y luego se busca la ruta aumentante:

Iteración 1: Se encuentra la ruta 1-3-B-4 con flujo 4

Arco	Capacidad Disponible	Flujo
1-2	8	0
1-3	0	4
2-A	6	0
3-B	3	4
A-3	6	0
B-4	5	4
A-4	4	0

Iteración 2: Se encuentra la ruta 1-2-A-4 con flujo 4

Arco	Capacidad Disponible	Flujo
1-2	4	4
1-3	0	4
2-A	4	4
3-B	3	4
A-3	6	0
B-4	5	4
A-4	0	4

Iteración 3: Se encuentra la ruta 1-2-3-B-4 con flujo 2

Arco	Capacidad Disponible	Flujo
1-2	2	6
1-3	0	4
2-A	2	6
3-B	1	6
A-3	4	2
B-4	3	6
A-4	0	4

Como no hay más rutas aumentantes, termina el algoritmo con F*=10.

Problema 5

Se quiere demostrar que si, $\aleph' = \{x \in V: Gr(x) = 2m + 1, m \in \mathbb{N}\}$ -> |ℵ´|=2n

Se demuestra por inducción en el número de arcos

CASO BASE: Si sólo hay un arco, como el grafo es conexo, el grafo tiene sólo dos nodos (par).

PASO INDUCTIVO:
Hipótesis inductiva*:* si existen m arcos en un grafo conexo, el número de nodos con grado impar es par.

Demostración para m+1: Si se agrega un arco más desde un nodo cualquiera a otro nodo, se tienen las siguientes posibilidades:

- *Nodo1 y Nodo2 grado impar*, si se agrega un arco, ambos quedan de grado par. Por lo tanto, como antes |ℵ´|=2n, ahora |ℵ´|=2n-2, que también es par.

- *Nodo1 y Nodo2 grado par*, si se agrega un arco, ambos que dan de grado impar. Por lo tanto, como antes |ℵ´|=2n, ahora |ℵ´|=2n+2, que también es par.

- *Nodo1 impar, Nodo2 par*, si se agrega un arco, el Nodo 1 queda con grado par y el nodo 2 queda con grado impar. Por lo tanto, como antes |ℵ´|=2n, ahora |ℵ´|=2n+1-1=2n, que también es par.

- *Nodo1 par, Nodo2 impar*, análogo al anterior.