INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Daniel Espinoza, Gonzalo Romero

Auxiliares: Víctor Bucarey, Nelson Devia, Jocelyn González, Fernando Solari

IN3701 – Optimización

P1, Auxiliar 8

Sea A una matriz dada. Muestre que exactamente una de las siguientes alternativas debe suceder.

a) Existe algún $x \neq 0$ tal que $Ax = 0,\ x \geq 0$.
b) Existe algún y tal que $y^t A > 0$.

Solución

El enunciado nos sugiere los siguientes problemas:

(P) Max $\sum x$	(D) Min 0
s.a. $\mathrm{A}x = 0$	s.a. $y^t \mathrm{A} \geq \mathbb{1}$
$x \geq 0$	

- Si existe algún y tal que $y^t A > \mathbb{1} > 0$, significa que (D) es factible → (P) es factible y según dualidad fuerte el óptimo de (P) es 0 → no puede existir un $x \neq 0$ factible (que cumpla con las restricciones $\mathrm{A}x = 0$, $x \geq 0$) si no, el óptimo sería ≥ 0.

- Si existe algún $x \neq 0$ tal que $Ax = 0,\ x \geq 0$, la función objetivo de (P) sería > 0, entonces por dualidad fuerte, el óptimo de (D) debiera ser > 0 → no existe un y que cumpla con $y^t \mathrm{A} \geq \mathbb{1} > 0$, que haga una función objetivo positiva.

Para mostrar que una de las alternativas debe suceder, tomamos el punto $x = 0$, con el cual probamos que (P) es siempre factible, esto implica que (D) es factible, por lo tanto siempre existe un y tal que $y^t A \geq \mathbb{1} > 0$.