INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesor: Daniel Espinoza, Gonzalo Romero
Auxiliares: Víctor Bucarey, Nelson Devia, Jocelyn González, Fernando Solari

IN3701 – Optimización
Auxiliar 7
7 de mayo del 2009

Resumen:

	Dual			
Primal		**Finito óptimo**	**No acotado**	**Infactible**
	Finito óptimo	Posible	Imposible	Imposible
	No acotado	Imposible	Imposible	Posible
	Infactible	Imposible	Posible	Posible

Esta tabla es resultado de los teoremas de Dualidad y del Teorema de Clark.

Teorema de Clark:

A menos que el problema dual y el primal sean infactible, al menos uno de ellos tiene que tener el conjunto de soluciones no acotado.

Problema 1

Considere el problema de programación lineal de minimizar $c'x$ sujeto a $Ax=b$, $x \geq 0$. Sea x^* la solución óptima, asuma que existe, y sea p^* la solución del problema dual.

a) Sea x'' una solución óptima del primal, cuando c es reemplazado por algún c''. Muestre que $(c'' - c)'(x'' - x^*) \leq 0$.

b) Sea el vector de costo fijo e igual a c, pero suponga que ahora cambiamos b por b'', y sea x la correspondiente solución del primal. Muestre que $(p^*)'(b'' - b) \leq c'(x'' - x^*)$.

SOL:

a) Primero tenemos que notar que si cambiamos el vector de costo, la región factible de ambos problemas será la misma:

$$
\begin{array}{lll}
P1 & & \min\ c\,x \\
& \text{s.a} & Ax = b \\
& & x \geq 0
\end{array}
$$

y

$$\begin{array}{ll} P2 & \min\ c'' x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Tienen la misma región factible, luego x* y x” son soluciones factibles de ambos problemas, puesto que son soluciones óptimas.

Luego:

$$(c'' - c)'(x'' - x^*) = c''x'' - cx'' - c''x^* + cx^* \qquad (*)$$

Pero:

$$\begin{array}{ll} c''x'' = y''\, b & \text{Por dualidad fuerte} \\ c''x^* \geq y''\, b & \text{Por dualidad débil} \\ & \\ cx^* = y^*\, b & \text{Por dualidad fuerte} \\ cx'' \geq y^*\, b & \text{Por dualidad débil} \end{array}$$

Luego:

$$\begin{aligned} c''x'' - cx'' - c''x^* + cx^* &\leq y''b - y''b + y^*b - y^*b \\ &= 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

b) Nuevamente tenemos dos problemas:

$$\begin{array}{ll} P1 & \min\ cx \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ll} P2 & \min\ cx \\ \text{s.a} & Ax = b'' \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Notar que estos dos problemas no tienen la misma región factible, así que la metodología anterior no nos sirve.

$$c(x'' - x^*) = cx'' - cx^*$$
$$= cx'' - y^*b \qquad \text{Por dualidad fuerte. } (**)$$

Luego nos basta demostrar que,

$$c(x'' - x^*) = cx'' - y^*b \geq y^*b'' - y^*b = y^*(b'' - b)$$

Por otro lado sabemos que $cx'' = y''b''$, con y'' solución del problema dual de P2. Notar que al existir x'' este existe.

Veamos los problemas duales:

$$\begin{array}{ll} D1 & \text{máx } yb \\ \text{s.a} & A'y \leq c \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ll} D2 & \text{máx } yb'' \\ \text{s.a} & A'y \leq c \end{array}$$

Estos problemas tienen la misma región factible, entonces:

y^* es solución óptima de D1, luego, en particular es solución básica factible de D1, entonces al tener la misma región factible , es solución factible de D2, por lo tanto $y''b'' \geq y^*b''$.

Luego por (**):

$$c(x'' - x^*) = cx'' - y^*b \geq y^*b'' - y^*b = y^*(b'' - b) \blacksquare$$

Problema 2

Considere un problema de programación lineal en forma estándar el cual es infactible, pero que se convierte en factible y con un costo óptimo finito cuando la ultima restricción de igualdad es omitida. Muestre que el problema dual del original (infactible) es factible y que el costo optimo es infinito.

Solución:

Tenemos los siguientes problemas:

$$(P)\ \min c^t x$$
$$Ax = b$$
$$\mathrm{a}_{\mathrm{m+1}}\, x = b_{m+1}$$
$$x \geq 0$$

El cual es infactible. Asumimos que es la última restricción la que hace el problema infactible.

$$(P')\ \min c^t x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

El cual es factible y tiene un costo óptimo finito, pues eliminamos la restricción que hacia infactible el problema.

$$(D')\ \min b^t y$$
$$A^t y \leq c$$

El cual es el primal del problema (P'). Como P' tiene un óptimo, y un costo finito, entonces D' tambien los posee.

Sea D el dual de D',

$$(D)\ \min b^t y + b_{m+1} y_{m+1}$$
$$A^t y + a_{m+1}^t \leq c$$

P.D.Q. (D) es factible y no acotado.

Para probar factibilidad debemos encontrar un punto (y, y_{m+1}) que cumpla con la restricción: $A^t y + a_{m+1}^t y_{m+1} \leq c$.

Como (P') es factible y tiene óptimo finito, (D') es factible y tiene óptimo finito.

→ ∃ $\bar{y}$ tal que $A^t \bar{y} \leq c$ (porque D' es factible)

Si tomamos $y_{m+1} = 0$ → el punto $(\bar{y}, 0)$ cumple con $A^t \bar{y} + a_{m+1}^t 0 \leq c$
→ (D) es factible.

Si observamos tabla de dualidad el dual de un problema infactible puede ser infactible o no acotado, pero ya probamos que es factible, por lo tanto el dual debe se no acotado◊