INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesor: Daniel Espinoza, Gonzalo Romero

Auxiliares: Víctor Bucarey, Nelson Devia,
Jocelyn González, Fernando Solari

IN3701 – Optimización
Auxiliar 6
30 de abril del 2009

Problema 1

Sea A una matriz simétrica cuadrada. Considere el siguiente PPL:

$$\begin{aligned}(P)\min\ & c^t x\\ \text{s.a } & Ax \geq c\\ & x \geq 0\end{aligned}$$

Pruebe que si $\bar{x}$ satisface $A\bar{x} = c$ y $\bar{x} \geq 0$, entonces $\bar{x}$ es una solución óptima.

Problema 2

Considere el problema que enfrenta una mueblería que fabrica sillas y mesas, los materiales que ocupa son básicamente clavos y madera, sabemos que para fabricar 1 silla se requiere de 8 clavos y 4 tablas de madera y que para una mesa se necesitan 5 clavos y 10 tablas de madera. Actualmente, la bodega tiene 500 clavos y 400 tablas, y se sabe que cada silla se vende a 4 unidades monetarias$[u.m.]$ y una mesa se vende a 5$[u.m.]$.

a) Plantee el ppl (P) que maximice la utilidad de esta mueblería, dado el inventario de clavos y tablas en la bodega. Encuentre el óptimo gráficamente.

Queremos pasar de un problema de maximización de beneficios a uno de minimización de costos, para esto:

b) Amplifique cada restricción i por una variable Yi y sume ambas inecuaciones.
c) Imponga algunas condiciones para encontrar una cota superior para la F.O. de (P), escriba el ppl (D) que encuentra la mínima cota superior.
d) Encuentre el óptimo del dual y de una interpretación económica de estos valores en el problema (P).

Si ahora considera los horarios de trabajos y sabe que dispone de 70 horas hombre $[H.H.]$ y que cada mesa o silla toma un tiempo de 1 hora en ser fabricada.

e) Plantee el nuevo PPL y obtenga las bases factibles que describen el óptimo, calcule el óptimo del dual de cada base e interprete el significado de las variables duales óptimas para este caso.

Problema 3

Considere un problema de programación linear en forma estándar el cual es infactible, pero que se convierte en factible y con un costo óptimo finito cuando la ultima restricción de igualdad es omitida. Muestre que el problema dual del original (infactible) es factible y que el costo optimo es infinito.

Pauta Auxiliar 5
23 de Abril de 2009

Problema 1

Sea (D) $\max\ c^t y$ el dual de (P)

s.a $Ay \leq c$

$y \geq 0$

Y sea $\bar{y}$ tal que $A\bar{y} = c$ $/\cdot c\, A^{-1}$

$c\bar{y} = c\, A^{-1} c$

Por enunciado $A\bar{x} = c$ $/\cdot c\, A^{-1}$

$c\bar{x} = c\, A^{-1} c = c\bar{y}$

Como $\bar{y}$ es factible en (D), por dualidad débil se tiene:

$c\bar{y} \leq cx$ $\forall x$ factible en (P)

$\rightarrow c\bar{x} \leq cx$ $\forall x$ factible en (P)

$\rightarrow \bar{x}$ es óptimo de (P)

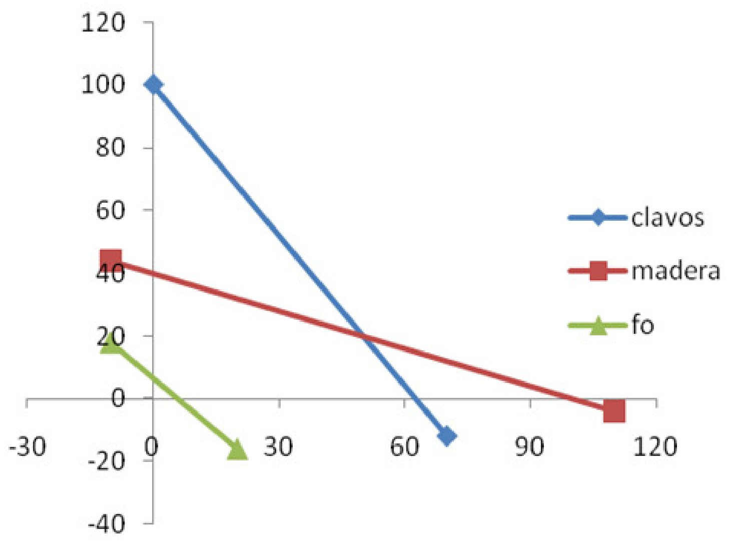
Problema 2

a) (P) Max $4X_1+5X_2$

s.a. $8X_1 + 5X_2 \leq 500$ (clavos)

$4X_1 + 10X_2 \leq 400$ (tablas)

$X_1, X_2 \geq 0$



$\rightarrow X^* = (50, 20)$

b)

Max $4X_1+5X_2$

s.a. $8X_1 + 5X_2 \leq 500$ $\quad /\cdot Y_1$

$4X_1 + 10X_2 \leq 400$ $\quad /\cdot Y_2$

$X_1, X_2 \geq 0$

$(8X_1 + 5X_2)Y_1 + (4X_1 + 10X_2)Y_2 \leq 500Y_1 + 400Y_2$

$(8Y_1 + 4Y_2)X_1 + (5Y_1 + 10Y_2)X_2 \leq 500Y_1 + 400Y_2$

c)

Notemos que si: Y1, Y2 ≥ 0 ; (8 Y1+4 Y2) ≤ 4 y (5 Y1+10 Y2) ≤5

$\rightarrow 4X_1+5X_2 \leq 500Y_1 + 400Y_2$

$\rightarrow$ (D) min $500Y_1 + 400Y_2$

s.a. $8Y_1 + 4Y_2 \geq 4$

$5Y_1 + 10Y_2 \geq 5$

$Y_1, Y_2 \geq 0$

d)

Por teorema de holgura complementaria tenemos:

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*\right) x_j^* = 0 \quad \forall j$$

- $(4 - 8\,Y_1^* - 4\,Y_2^*)50 = 0 \quad \rightarrow 4 - 8\,Y_1^* - 4\,Y_2^* = 0$
- $(5 - 5\,Y_1^* - 10\,Y_2^*)20 = 0 \quad \rightarrow 5 - 5\,Y_1^* - 10\,Y_2^* = 0$

$$\rightarrow Y^* = (1/3 \quad 1/3)$$

<u>Teoría</u>:

Sabemos que: $c^t x = c_b^t x_b = c_b^t \overline{b} = c_b^t B^{-1} b$

Si aumento (b_1,b_2) en 1 unidad, hay un nuevo valor para la f.o. con $\bar{x}$,

$$c^t\bar{x} = c_b^t \bar{x}_b = c_b^t B^{-1}\begin{pmatrix} b_1+1 \\ b_2+1 \end{pmatrix} = c_b^t B^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + c_b^t B^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_b^t x_b + \underbrace{c_b B^{-1}}_{y*}$$

$$c^t\bar{x} = c^t x^* + y^*$$

Comprobémoslo numéricamente:

$$\tilde{x} = B^{-1}\left(b + \binom{1}{0}\right) = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 501 \\ 400 \end{bmatrix} = \frac{1}{60}\begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 501 \\ 400 \end{bmatrix} = \frac{1}{60}\begin{bmatrix} 3010 \\ 1196 \end{bmatrix}$$

$$c^t\tilde{x} = \frac{1}{60}(4 \quad 5)\binom{3010}{1196} = \frac{4*301}{6} + \frac{5*1196}{60} = 300,\bar{3} = 300 + 1/3$$

<u>Intuición</u>:

Y_i* representa el aumento en la función objetivo de (P), cuando b_i crece en una unidad, es decir, es el beneficio en $[u.m.]$ que me genera tener una unidad extra del insumo i.

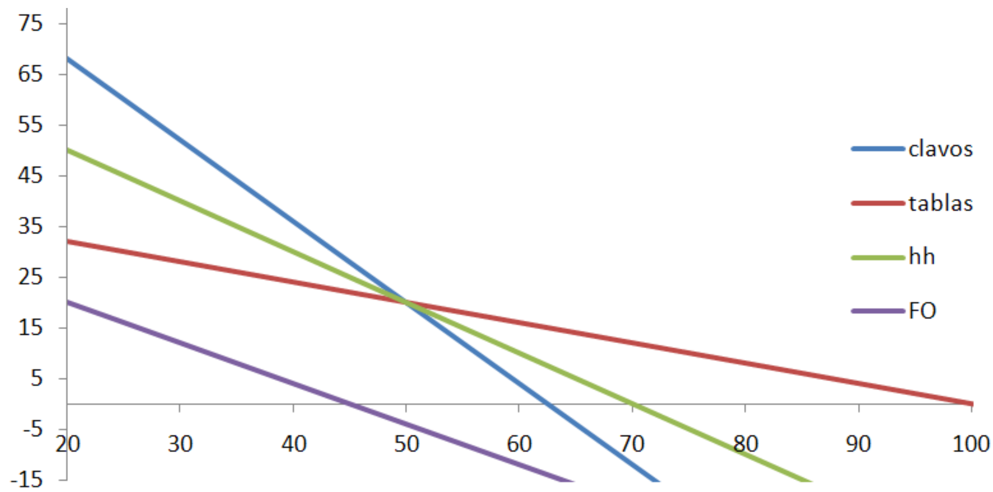
e)

(P')Max $5X_1+5X_2$
s.a. $8X_1 + 5X_2 \leq 500$
$4X_1 + 10X_2 \leq 400$
$X_1 + X_2 \leq 70$
$X_1, X_2 \geq 0$

(F.E.)→

Min -5X1 -5X2
s.a. $8X_1 + 5X_2 + X_3 = 500$
$4X_1 + 10X_2 + X_4 = 400$
$X_1 + X_2 + X_5 = 70$
$X_i \geq 0$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



El óptimo es degenerado lo que significa que una variable básica, de la base asociada al punto óptimo, será igual a 0, por lo tanto, puede existir más de una base con costos reducidos positivos.

Veamos las 3 bases que podrían describir al óptimo y luego calculemos los costos reducidos.

$R_1 \cap R_2 \;\Rightarrow\; X_r^1 = \{x_3, x_4\}$; $\;X_b^1 = \{x_1, x_2, x_5\}$

$R_1 \cap R_3 \;\Rightarrow\; X_r^2 = \{x_3, x_5\}$; $\;X_b^2 = \{x_1, x_2, x_4\}$

$R_1 \cap R_2 \;\Rightarrow\; X_r^3 = \{x_4, x_5\}$; $\;X_b^2 = \{x_1, x_2, x_3\}$

Vemos si el punto representado por las bases es óptimo ($\bar{c}_r \geq 0$) y factible ($\bar{b}_i \geq 0$), se calcularán los $\bar{R}_i$ y $\bar{b}_i$ con las siguientes formulas:

$\bar{R}_i = {B_i}^{-1} R_i$

$\bar{b}_i = {B_i}^{-1} b$

Además, para este caso en particular, las 3 bases anteriores cumplen con:

$c_b^t = (-1 \quad -2 \quad 0) \qquad c_r^t = (0 \quad 0)$

$\Rightarrow \bar{c}_r = c_r^t - c_b^t \bar{R} = (1 \quad 2 \quad 0)\bar{R}$

Y sabemos que $b^t = (500 \quad 400 \quad 0)$

- Base 1:

$$B_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 4 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \quad {B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/12 & 0 \\ -1/15 & 2/15 & 0 \\ -1/10 & -1/20 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}_1 = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/12 \\ -1/15 & 2/15 \\ -1/10 & -1/20 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \boxed{c_{r1} = (1/2 \quad 1/3)} \qquad \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Z^* = -350$

- Base 2:

$$B_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 4 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \quad {B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -5/3 \\ -1/3 & 0 & 8/3 \\ 2 & 1 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & -5/3 \\ -1/3 & 8/3 \\ 2 & -20 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \boxed{c_{r1} = (0 \quad 5)} \qquad \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇒ Z^*=-350

- Base 3:

$$B_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 4 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad {B_3}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/6 & 5/3 \\ 0 & 1/6 & -2/3 \\ 1 & 1/2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}_3 = \begin{pmatrix} -1/6 & 5/3 \\ 1/6 & -2/3 \\ 1/2 & -10 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \boxed{c_{r1} = (0 \quad 5)} \qquad \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nota: En este caso, todos los $c_r \geq 0$, pero en un caso degenerado, puede ocurrir que en alguna base que describe al punto óptimo el $c_r \leq 0$.

Calculemos el dual

(D') max 500 Y_1+ 400 Y_2 +70 Y_3

s.a. $\quad 8 Y_1 + 4 Y_2 + Y_3 \leq -5$

$\quad 5 Y_1 + 10 Y_2 + Y_3 \leq -5$

$\quad Y_1, Y_2, Y_3 \leq 0$

Los valores óptimos del dual según $Y^*=c_b B^{-1}$, para cada base, son:

$$y_1^* = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad y_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

La interpretación de las variables duales en los casos en que la solución óptima es degenerada no es clara. Ej. si aumento el numero de trabajadores y se están usando todos los insumos (restricciones de clavos y tablas activas) no es claro que aumente el beneficio.

Por lo tanto, se debe tener cuidado cuando la solución óptima arroje variables básicas = 0, ya que estamos en un caso degenerado y no podemos concluir según la interpretación clásica de los precios sombra.

Problema 3 propuesto.