Optimización de gran escala

Dpto. Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

IN3701, Optimización

29 de abril de 2009

Contenidos

Motivación

- Hasta ahora hemos desarrollado teoría y algoritmos para resolver problemas del tipo $(P) : \min\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$.
- Hay casos donde A no cabe en memoria, pero donde (P) puede ser resuelto a optimalidad.
- ¿Qué podemos hacer cuando n es demasiado grande?
  - Hay razones prácticas y teóricas para evaluar sub-conjunto de variables.
  - Éstas técnicas se llaman generación de columnas.
- ¿Qué podemos hacer cuando m es demasiado grande?
  - Esta puede verse como la situación dual a la anterior.
  - Mismos métodos sirven, en este contexto se llaman generación de desigualdades.
- Veremos algunas aplicaciones a estas técnicas.

Generación de columnas :

- Consideramos (P) : $\min\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$.
    - Sea $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tal que $\mathrm{rank}(A_I) = m$.
    - Consideremos (P_I) : $\min\{c_I x_I : A_I x_I = b, x_I \geq 0\}$.
    - Si (P_I) es no acotado, entonces (P) es no cotado.
    - Sea B base óptima de (P_I).
    - Note que B es base factible para (P).
    - Bajo qué condiciones B es base óptima de (P)?
    - Basta verificar que (S) : $\min\{\overline{c}_i : i = 1, \ldots, n\} \geq 0$.
    - (S) se llama problema de pricing.
    - Hay muchos casos donde (S) puede resolverse sin tener que evaluar cada $\overline{c}_i$.
    - Si no, sea $i_o = \mathrm{argmin} z_S$, podemos redefinir $I \leftarrow I \cup \{i_o\}$ e iterar.
- Podría descartar de I la variable básica que sale de la base.
- Podría agregar algún i tal que $\overline{c}_i < 0$, o más de uno.
- Este esquema puede verse como una versión especial del método de simplex.
- El algoritmo termina bajo las mismas condiciones que simplex.
    - ¿Bajo qué condiciones podemos detenernos antes de terminar?

Un Ejemplo:

Cutting Stock Problem

Considere el problema de una firma que produce rollos de papel de una dimensión uniforme L, pero que recibe demanda de d_i rollos de ancho L_i para $i \in I$.
El problema es minimizar las pérdidas de material (trozos sobrantes) pero satisfaciendo la demanda.

- Una alternativa es definir una variable por rollo a cortar, y por posibles elementos en cada rollo.
- Muchas variables y mucha simetría
  - ¿Por qué simetría es un problema?
- Formulación Alternativa:
  - Definir una variable entera por cada posible es esquema de corte.
  - Bastan variables por esquemas de cortes maximales.
  - Pocas restricciones, muchas variables.
  - ¿Cómo identificamos una nueva variable a considerar?

Generación de restricciones:

- Consideramos (P) : $\max\{cx : a_i x \leq b_i, \forall i \in N\}$.
  - Sea $I \subseteq N$ y definimos (P_I) : $\max\{cx : a_i x \leq b_i, \forall i \in I\}$.
  - Claramente $z_{P_I} \geq z_P$.
  - Si $x^*_{P_I}$, solución óptima de P_I, es factible para P, entonces es la solución óptima de P.
  - Si $x^*_{P_I}$ es infactible, agregar alguna restricción violada a I.
    - ¿Cuál es la interpretación gráfica de lo que hacemos?
    - ¿Cuál de todas agregar?
  - Usualmente se resuelve (S) : $\min\{b_i - a_i x^*_{P_I} : i \in N\}$.
  - (S) se llama problema de separación.
  - Factibilidad de $x^*_{P_I}$ es equivalente a $z_S \geq 0$.
  - En algunos casos, el problema (S) puede resolverse sin enumeración.
  - Esto puede interpretarse como generación de columnas en el dual de P.
- ¿Por qué funciona en la practica?
  - Pocas restricciones son activas en el óptimo o pocas variables son no-cero en el óptimo.

Descomposición de Dantzig-Wolfe

- Consideramos (P) : $\min \left\{ c_1x_1 + c_2x_2 : \begin{array}{rl} D_1x_1 + D_2x_2 & = b_o \\ F_1x_1 & = b_1 \\ F_2x_2 & = b_2 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{array} \right\}$
  - Podemos pensar que este modelo representa una firma con dos unidades que comparten algunos recursos comunes b_o.
  - Si $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, típicamente $m_o << m_i$ para $i = 1, 2$.
  - Definiendo $P_i = \{x_i : F_ix_i = b_i\}, i = 1, 2$, podemos re-escribir:
    (P) : $\min \left\{ c_1x_1 + c_2x_2 : \begin{array}{rl} D_1x_1 + D_2x_2 & = b_o \\ x_i & \in P_i \end{array} \right\}$
  - Sean $\{v_j^i\}_{i \in V_j}$ y $\{w_j^i\}_{i \in R_j}$ los puntos y rayos extremos de P_j.
  - Podemos re-escribir

$$(P') : \min \left\{ \begin{array}{rll} \sum_{j,i \in V_j} c_j v_j^i \lambda_j^i + \sum_{j,i \in R_j} c_j w_j^i \theta_j^i & : & \\ \sum_{j,i \in V_j} D_j v_j^i \lambda_j^i + \sum_{j,i \in R_j} D_j w_j^i \theta_j^i & = b_o & \\ \sum_{i \in V_j} \lambda_j^i & = 1 & j = 1, 2 \\ \lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2 & \geq 0 & \end{array} \right\}.$$

Descomposición de Dantzig-Wolfe

- Consideramos

$$(P) : \min \left\{ c_1 x_1 + c_2 x_2 : \begin{array}{rll} D_1 x_1 + D_2 x_2 & = b_o & \\ F_j x_j & = b_j, & j = 1, 2 \\ x_1, x_2 & \geq 0 & \end{array} \right\}$$

  - (P') y (P) son equivalentes.
  - El problema resultante tiene sólo $m_o + 2$ restricciones.
  - ... pero $|V_j|, |R_j|$ pueden ser muy grandes.
  - ... y si usamos generación de columnas?
  - Sea $y^t = (q^t, r_1, r_2)$ una solución dual óptima de (P') en un sub-conjunto de V_j, R_j.
  - El costo reducido de λ_j^i es $c_j v_j^i - q^t D_j v_j^i - r_j = (c_j - q^t D_j) v_j^i - r_j$.
  - El costo reducido de θ_j^i es $(c_j - q^t D_j) w_j^i$.
  - Llamamos $c_j - q^t D_j = \overline{c}_j$ el costo modificado en P_j.
  - Basta resolver entonces $(P_j) : \min\{\overline{c}_j x_j : x_j \in P_j\}$.
  - Si (P_j) es no acotado, encontramos w_j^i que agregar al problema.
  - Si $z_{P_j} < r_j$, encontramos v_j^i que agregar al problema.
  - Si no, solución es óptima en (P).
  - Podemos terminar antes? ¿Con qué garantías?