DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Daniel Espinoza G, Gonzalo Romero.
Semestre: Otoño 2009

IN3701 Optimización

Pauta Control N^{o}1

P3 Considere el poliedro en forma estándar $P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax = b\}$. Suponga que la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es de rango completo. Para cada una de las siguientes afirmaciones, establezca si es verdadera o falsa. Si verdadera, demuestre, si falsa, de un contra-ejemplo.

1. Si $n = m+1$, entonces P posee a lo más dos soluciones básicas factibles.
   Verdadero: Como P esta en forma estándar, tiene al menos un punto extremo v_o, si no existen mas puntos extremos, el resultado se tiene y no hay nada mas que demostrar. Sea v_i otro punto extremo. Definamos $d_i = v_o - v_i$, d_i satisface $Ad_i = 0$, pero la dimensión de $\{d : Ad = 0\} = n-m = 1$, por lo que existe $d_o \neq 0$ tal que $d_i = \alpha_i d_o$ para cualquier v_i. Sea $\alpha_\infty = \text{máx}\{\alpha_i : v_i \text{ es punto extremo }\}$, y sea v_∞ donde se alcanza el máximo. Entonces si $\alpha_i < \alpha_\infty$, tenemos que v_i no es punto extremo por ser combinación convexa de v_o y v_∞. Esto implica que $\alpha_i = \alpha_\infty \forall i$, por lo que $|\{v_i : v_i \text{ es punto extremo }\}| = 2$.
2. El conjunto de todas las soluciones óptimas es acotado.
   Falso: Basta considerar $P := \{x \in \mathbb{R}^n_+\}$ y minimizar $c = -e_i$, donde e_i es el i-ésimo vector canónico. En este caso el conjunto óptimo son los $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : x_i = 0\}$, que es no-acotado.
3. Toda solución óptima posee a lo más m componentes no-cero.
   Falso: Basta considerar $\text{máx}\{x_1 + x_2 : x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$, el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es óptimo y posee más de una componente no cero.
4. Si hay más de una solución, entonces el cardinal de las soluciones óptimas es no numerable.
   Verdadero: Si hay mas de una solución óptima, entonces hay dos x_1, x_2 y por convexidad todas las combinaciones convexas de ellas,

es decir $\{x : x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \in [0,1]\}$, entonces $|\{x : x$ es óptimo $\}| \geq |\{\lambda : \lambda \in [0,1]\}| = \aleph_1$.

5. Si hay mas de una solución óptima, entonces hay al menos dos soluciones básicas factibles óptimas.
   Falso: considere $P := \{x \in \mathbb{R}^n_+\}$ y minimizar $c = -e_i$. P posee sólo un punto extremo, y el conjunto de soluciones óptimas tiene mas de dos puntos.
6. Considere el problema de minimizar $\max\{cx, dx\}$ sobre P. Si este problema tiene una solución óptima, existe un punto extremo de P que es solución óptima del problema.
   Verdadero: Sea z_o el valor óptimo del problema. Consideremos el problema $(P') := \min\{(1,0)\cdot(z,x) : z \geq cx, z \geq dx, z \geq z_o, x \in P\}$. Por hipótesis (P') tiene solución óptima, y como (P') no posee ninguna línea, (P') posee vértices, por lo que hay una solución óptima (z_o, x_o) que es vértice de (P'), demostremos que x_o es vértice de P. Por contradicción, sean $x_1, x_2 \in P$ tales que $x_o = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, sea $z_i = \max\{cx_i, dx_i\}$, claramente $z_i \geq z_o$, y $(z_i, x_i) \in P'$. Por optimalidad, necesariamente $z_i = z_o$, por lo que $(z_o, x_o) = \lambda(z_1, x_1) + (1-\lambda)(z_2, x_2)$, lo que contradice la elección de x_o.

Bono Suponga que $\{x \in \mathbb{R}^n : a_i x \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m\}$ y que $\{x \in \mathbb{R}^n : g_i x \geq h_i, \quad i = 1, \ldots, k\}$ son dos representaciones del mismo poliedro no vacío P. Demuestre que si $\langle \{a_i\}_{i=1}^m \rangle = \mathbb{R}^n$ entonces $\langle \{g_i\}_{i=1}^m \rangle = \mathbb{R}^n$.

Demostración: Como P es no vacío, y como $\langle \{a_i\}_{i=1}^m \rangle = \mathbb{R}^n$, entonces P tiene un vértice. Como $P = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i x \geq h_i, \quad i = 1, \ldots, k\}$, y P tiene un vértice, necesariamente el conjunto de restricciones que lo define contiene un conjunto l.i. de tamaño n, por lo que $\langle \{g_i\}_{i=1}^m \rangle = \mathbb{R}^n$.