INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Daniel Espinoza, Gonzalo Romero

Auxiliares: Víctor Bucarey, Nelson Devia, Jocelyn González, Fernando Solari

**IN3701 – Optimización**
**Auxiliar 5**
**23 de Abril de 2009**

## Problema 1

Sea, $f$: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, S $\epsilon\ R^n$ un conjunto convexo y $x^*$ un elemento de S. Suponga que $x^*$ es un óptimo local para el problema de minimización $f(x)$ en S; ie, Existe un $\varepsilon > 0$ tal que $f(x^*) \leq f(x)\ \ \forall\ x \in S$ que cumple $\parallel x - x^* \parallel \leq \varepsilon$. Pruebe que $x^*$ es un óptimo global; esto es, $f(x^*) \leq f(x)\ \forall\ x \in S$.

## Problema 2

Considere el problema de minimización $c^t$ x en el poliedro P, pruebe lo siguiente:

a) Una solución factible x es óptima ssi $c^t$ d ≥ 0, para toda dirección factible d en x.
b) Una solución factible x es la única solución óptima ssi $c^t$ d > 0 para toda dirección factible d ≠ 0 en x.

## Problema 3

Sea x una solución básica factible asociada con alguna matriz B, pruebe que:

a) Si el costo reducido de todas las variables no básicas es positivo, entonces x es la única solución óptima.
b) Si x es la única solución y es no degenerada, entonces el costo reducido de todas las variables no básicas es positivo.

**Problema 4**

En las eliminatorias sudamericanas para el Mundial de Fútbol Sudáfrica 2010 compiten 10 equipos, todos ellos juegan dos partidos con cada equipo participante, ida y vuelta. Esto es, en total se juegan 18 fechas de 5 partidos cada una. Luego de terminadas las 18 fechas clasifican los 4 equipos con mayor acumulación de puntos. Como es sabido, se asignan 3 puntos por partido ganado y 1 por partido empatado, y en caso de empate en el 4o lugar, se juega un repechaje con el campeón de Oceanía.
Fecha a fecha, los fanáticos pesimistas ya comienzan a sacar todo tipo de cuentas, quienes desean saber cuál es la máxima cantidad de puntos que necesita su país para, con seguridad, clasificar.
Se pide que formule el modelo pesimista para La Roja, para determinar los puntajes requeridos. Considere que en caso de empate en cuarto lugar y repechaje, en el modelo pesimista el equipo no clasifica.

**Hint**: Utilice al menos una familia de variables enteras que definan la cantidad de partidos que el equipo *i* le gana al *j*, y una variable entera para cada equipo rival de La Roja que valga 1 si el conjunto tiene igual o más puntos que Chile y 0 en caso contrario.

**Pauta Auxiliar 5**
**23 de Abril de 2009**

**Problema 1**

Sea $\mathrm{b} \in S$, como S es convexo ∃ a tal que $\| \mathrm{a} - \mathrm{x}^* \| \leq \varepsilon$ y ∃ λ tq $\mathrm{a} = \lambda \mathrm{x}^* + (1-\lambda)\,\mathrm{b}$

Como x* es óptimo local se tiene que: $\mathrm{f}(\mathrm{x}^*) \leq \mathrm{f}(\mathrm{a})$

Como f es convexa: $\mathrm{f}(\mathrm{a}) \leq \lambda \mathrm{f}(\mathrm{x}^*) + (1-\lambda)\mathrm{f}(\mathrm{b})$

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}^*) \leq \lambda \mathrm{f}(\mathrm{x}^*) + (1-\lambda)\mathrm{f}(\mathrm{b})$$

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}^*)(1-\lambda) \leq (1-\lambda)\mathrm{f}(\mathrm{b})$$

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}^*) \leq \mathrm{f}(\mathrm{b})$$

Luego, x* es óptimo global

**Problema 2**

a)

⟹ **Condición suficiente (por contradicción)**

Sea x solución óptima $(c^t x \leq c^t y \quad \forall \mathrm{y} \in \mathrm{P})$

Supongamos que ∃ d tal que $c^t d < 0$

Sea $y = x + \theta d, \qquad \theta > 0$

Como x es óptimo: $c^t x \leq c^t y$

$$c^t x \leq c^t (x + \theta d)$$

$$0 \leq \theta c^t d$$

$$0 \leq c^t d \quad \rightarrow\leftarrow$$

⟸ **Condición necesaria**

Supongamos que $c^t d \geq 0 \quad \forall$ d dirección factible

Sea y tal que $d = y - x$

$$c^t d \geq 0$$

$$c^t (y - x) \geq 0$$

$$c^t y \geq c^t x$$

Luego $x$ es óptimo

b)

$\Leftarrow$ **Condición necesaria**

Sea y otra solución óptima, con x≠y

Como $y \in P$, $\exists\, un\ \bar{d}$ tal que: $y = x + \theta\bar{d}$, ya que P es convexo

Tenemos que $c^t d > 0$ $\forall$ d factible, en particular para $\bar{d}$

$c^t\bar{d} > 0$

Si multiplicamos la ecuación anterior por $\theta$ y le sumamos $c^t x$

$$c^t(x + \theta\bar{d}) > c^t x$$

$$c^t y > c^t x$$

Luego x es el único óptimo.

$\Longrightarrow$ **Condición suficiente (por contradicción)**

Sea x el único óptimo $\quad c^t x < c^t y \quad \forall\, y \in P/\{x\}$

Además, todo $y \in P/\{x\}$ se puede escribir como: $y = x + \theta\bar{d}$ con $\theta > 0$, ya que P es convexo

Supongamos que $\exists\ \bar{d}$ factible tal que $c^t\bar{d} \leq 0$

Al multiplicar por $\theta$ y sumar $c^t x$ en ambos lados, obtenemos:

$$c^t(x + \theta\bar{d}) \leq c^t x$$

$$c^t y \leq c^t x \quad \rightarrow\leftarrow$$

**Problema 3**

Sea $x \neq \bar{x}$

Como x no es el óptimo, alguna variable no básica en la base óptima tendrá valor positivo en x, es decir:

$\exists\, k \in N^*$ tal que $x_k > 0$, $N^*$: conjunto de variables no básicas en la base óptima

Sabemos que en el óptimo: $\quad c\bar{x} = c_b\bar{b}$

En x: $\quad cx = c_b\bar{b} + \bar{c}_r x_r$

$$= c_b\bar{b} + \sum_{i\in N^*} \bar{c}_i\, x_i \qquad (\text{donde } x_i = 0\ para\ i \neq k)$$

$$= c_b\bar{b} + \underbrace{c_k}_{>0} x_k$$

$$> c_b\bar{b} = c\bar{x}$$

Luego $\overline{x}$ es el único óptimo.

a)

Como $\bar{x}$ es no degenerada $\exists\ \lambda > 0\ tal\ que\ \bar{x} + \lambda v^k \in P$ con $v^k$ dirección básica en $\bar{x}$

$v^k = (v_b, v_r) = (-\overline{A_k}\ , e_k)$

$$c(\bar{x} + \lambda v^k) = c\bar{x} + \lambda c v^k$$
$$= c\bar{x} + \lambda(c_r - c_b\bar{R})v_r^k$$
$$= c\bar{x} + \lambda\overline{c_r}v_r^k$$

Por otro lado, como $\bar{x}$ es el único óptimo:

$$c\bar{x} < c(\bar{x} + \lambda v^k)$$
$$c\bar{x} < c\bar{x} + \lambda\overline{c_r}v_r^k$$
$$0 < \lambda\overline{c_r}v_r^k$$

Sabemos que $v_k^k$=1 y por lo tanto $\bar{c}_k > 0$

Finalmente, como usamos un k genérico esto se cumple $\forall k \in N^*$

**Problema 4**

- Modelo Pesimista (máxima cantidad de puntos para clasificar seguro).
- Se modela la máxima cantidad de puntos para quedar eliminado, de manera que al sumar 1 punto, La Roja quedaría clasificada.

***Variables de Decisión:***

$X_{ij}$ = Cantidad de partidos que el equipo i le gana al j.

$$Y_i = \begin{cases} 1 \text{ Si el equipo i tiene los mismos o más puntos que La Roja} \\ 0 \text{ Si no} \end{cases}$$

$P_i$ = Cantidad de puntos que tiene el equipo i.

***Restricciones***

1. Naturaleza de las variables

$$X_{ij} \in \{0,1,2\}$$
$$Y_i \in \{0,1\}$$
$$P_i \in \aleph$$

2. Combinación de resultados posibles

$$X_{ij} + X_{ji} \leq 2 \qquad\qquad \forall\, i, j \in \text{Equipos}, i \neq j$$

3. Cálculo de los puntos de cada equipo

$$P_i = 3 \sum_{i \neq j} X_{ij} + \sum_{i \neq j} (2 - X_{ij} - X_{ji}) \qquad \forall\, i \in \text{Equipos}$$

4. Condición para quedar eliminado

$$\sum_{i \neq 1} Y_i \geq 4$$

5. Obligar a la variable Yi a tomar valor uno cuando corresponda

$$P_i \geq P_1 - M(1 - Y_i) \qquad \forall\, i \in \text{Equipos}$$

6. Obligar a la variable Yi a tomar valor cero cuando corresponda

$$P_i \leq P_1 + M * Y_i \qquad \forall\, i \in \text{Equipos}$$

7. Incluir los resultados de partidor ya jugados.
   Sean (j; k) ∈ EquiposxEquipos los partidos que se han jugado,

   Si sólo se han jugado los partidos de ida.
   - Triunfo de j sobre k: $X_{jk} \geq 1$
   - Derrota de j por k: $X_{kj} \leq 1$
   - Empate de j con k: $X_{kj} + X_{jk} \leq 1$

   Si ya se han jugado los partidos de ida y de vuelta,
   $X_{ij} + X_{ji} = \_\_$ ,
   Donde "__" es el número que corresponde según la definición

***Función Objetivo***

Max Z = $P_1$

Luego, obteniendo $P_1$ + 1 puntos, La Roja queda clasificada.