INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Daniel Espinoza, Gonzalo Romero

Auxiliares: Víctor Bucarey, Nelson Devia, Jocelyn González, Fernando Solari

IN3701 – Optimización
Auxiliar 3
26 de Marzo de 2009

Problema 1

Sea f : $R^n \rightarrow R$ una función convexa y sea c alguna constante. Pruebe que el conjunto S= {x ∈ R^n | f(x) ≤ c} es convexo.

<u>SOL:</u>

Una función convexa es una función que cumple para λ ∈ [0, 1]:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \quad \leq \quad \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Lo que quiere decir que su aproximación lineal va a estar siempre por sobre la función.

Sea x, y ∈ S, y λ ∈ [0, 1]. Necesitamos probar que λx + (1 - λ)y ∈ S.

f(λx + (1 - λ)y)	≤ λf(x) + (1 - λ)f(y)	f es una función convexa
	≤ λc + (1 - λ)c	x, y ∈ S
	= c	

Por lo tanto λx + (1 - λ)y ∈ S, entonces S es un conjunto convexo.

Problema 2

Sabemos que cada problema de programación lineal puede ser convertido a su problema equivalente en la forma estándar. También sabemos que un poliedro no vacio en su forma estándar tiene al menos un punto extremo. Entonces podemos concluir que cualquier poliedro no vacio tiene al menos un punto extremo. Explique por qué este razonamiento es incorrecto.

Sol:

Este razonamiento falla por que al pasar de un poliedro cualquiera a un poliedro en su forma estándar, uno introduce variables, que son las que provocan la existencia de estos puntos extremos.

Veamos el siguiente ejemplo:

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

Entonces el poliedro equivalente en forma estándar sería introduciendo una variable de holgura, y dos variable para x1 y x2 que son irrestrictas:

Imponemos que:

$$x_1 = x_1' - x_1''$$
$$x_2 = x_2' - x_2''$$

Y luego:

$$x_1' - x_1'' + x_2' - x_2'' + x_3 = 3$$
$$x_3, x_1', x_1'' x_2', x_2'' \geq 0$$

Claramente este poliedro tiene un punto extremo, pero el primer problema no.

Problema 3

Teorema de Carathéodery

Sea $A_1, \dots, A_n$, una colección de vectores en R^m.

(a) Sea

$$C = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0\}$$

Pruebe que cualquier elemento de C puede ser expresado en la forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$, con $\lambda_i \geq 0$ y con lo más m componentes λ_i distintos de ceros.

Hint:

Considere el conjunto:

$$A = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = y,\ \lambda_i, \dots, \lambda_i \geq 0\}$$

¿Qué tipo de conjunto es este?

Sol:

Sea y $\in$ C $\subseteq R^m$. Entonces se escribe de la forma y $= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$, para algunos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$. Consideremos el conjunto

$$A = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = y,\ \lambda_i, \dots, \lambda_i \geq 0\}$$

Este conjunto es un poliedro en su forma estándar (en vez de tener variable vector x, es un vector en λ). Además es no vacio puesto que y $\in$ C, entonces existe al menos un vector $\lambda \in R^n$ que pertenece a A.

Entonces como ese conjunto es un poliedro en su forma estándar se sabe que tiene al menos un punto extremo.

Sea $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in R^n$ un punto extremo de ese poliedro. Entonces sabemos que existe un conjunto B = {B(1),…, B(m)} $\subseteq$ {1,…,n} tales que para B(i) $\notin$ B, entonces $\lambda_{B(i)}$=0.

Por lo tanto existen a lo más m componentes de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in R^n$ que son distintas de cero■

(b) Sea P la envoltura convexa de los vectores A_i:

$$P = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0\}$$

Muestre que cada elemento de P puede ser expresado de la forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$, donde $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ para todo i, con a lo más *m+1* coeficientes λ_i distintos de cero. ■

SOL:

De manera similar a la anterior.

Sea y ∈ P ⊆ R^m. Entonces se escribe de la forma y $=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$, para algunos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$.

Consideremos el conjunto:

$$D= \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = y\, ,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i, \dots, \lambda_i \geq 0 \}$$

Nuevamente este es un poliedro en su forma estándar con m+1 restricciones. Las primeras m restricciones vienen dadas por $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = y$, y la última restricción viene dada por $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. D es no vacio puesto que y pertenece a P (o sea existe al menos un vector λ que cumple las m+1 condiciones). Por lo tanto, D tiene al menos un punto extremo.

Sea $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in R^n$ un punto extremo de ese poliedro. Entonces sabemos que existe un conjunto B = {B(1),…, B(m+1)} ⊆ {1,…,n} tales que para B(i) ∉ B, entonces $\lambda_{B(i)}$=0.

Por lo tanto existen a lo más m+1 componentes de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in R^n$ que son distintas de cero■

Problema 4

Suponga que $\{x \in R^n \mid \mathrm{a}_\mathrm{i}^\mathrm{T}\mathrm{x} \geq b_i\, , i = 1, \dots, m \}$ y $\{x \in R^n \mid \mathrm{g}_\mathrm{i}^\mathrm{T}\mathrm{x} \geq h_i\, , i = 1, \dots, k\}$, son dos representaciones del mismo poliedro no vacio. Suponga que los vectores a_i abarcan R^n. Muestre que lo mismo es verdad para los vectores g_i.

Sol:

Propuesto.