

## Guía de Problemas de Programación Lineal Semestre Primavera 2003

### Modelamiento con Variables Binarias

1. El afamado galán Giuseppe Mandinga, ha decidido establecer el número de amigas que tendrá durante los próximos  $T$  días. Para ello, ha listado a todas las candidatas de su agenda y ha realizado estimaciones sobre cada una de ellas. Es así como su lista la componen  $N$  candidatas y cada una de ellas le exigirá  $c_i$  días destinados completamente a ella, pero su recompensa será un regalo de cada una al momento del rompimiento, el cual se ha tasado en  $b_i$ . Se desea maximizar el valor de los regalos que obtendrá una vez transcurridos los  $T$  días, formule el modelo correspondiente.
2. Una empresa constructora de circuitos eléctricos ha comprado un brazo mecánico a modo de automatizar su producción. La construcción de cada circuito requiere hacer  $N$  conexiones, las cuales están separadas entre sí. Dada ésta separación el brazo demora  $t_{ij}$  segundos en ir desde la conexión  $i$  a la conexión  $j$ . Por último, se sabe que al finalizar la construcción de un circuito, el brazo vuelve a una posición inicial para permitir sacar el circuito de la línea productiva. Formule el modelo que permita encontrar el menor tiempo de construcción de cada circuito a modo de aumentar el nivel productivo de la empresa.
3. La gerencia de un supermercado de la capital está empeñada en disminuir la cantidad de robos que esta sufriendo diariamente como consecuencia de la acción de los "mecheros". De manera de poder analizar la cantidad de cámaras que se necesitarán para no dejar ningún lugar del interior del supermercado sin vigilar, han dividido el lugar en zonas (panaderías, carnicerías, etc.). El costo de instalar una cámara en la zona  $i$ , que depende de la cantidad de cables necesarios y los trabajos en altura, es  $c_i$ , y permitirá vigilar ciertas zonas<sup>1</sup>. Se le pide formular un modelo que permita tomar ésta decisión teniendo en cuenta que la gerencia desea gastar la menor cantidad de dinero posible.
4. Un problema fundamental en el diseño urbano es la localización de servicios básicos como colegios, hospitales y áreas recreacionales. En este problema formularemos un modelo simplificado para decidir la localización de estaciones de bomberos en una ciudad.

La ciudad se puede dividir en  $I$  distritos, en que cada uno contiene  $p_i$  habitantes. Análisis preliminares (estudios de terrenos, factores políticos, etc.) han establecido que las estaciones de bomberos sólo pueden ser ubicadas en  $J$  sitios predeterminados dentro de la ciudad. Sea  $d_{ij} \geq 0$  la distancia desde el centro del distrito  $i$  hasta el sitio  $j$ . Se deben seleccionar los sitios en los cuales construir una estación (en un sitio cabe a lo más una) y además se debe asignar una estación a cada distrito. Es decir, cada distrito de la ciudad debe tener una (y sólo una) estación de bomberos asociada. Una estación puede tener más de un distrito asociado. Construir una estación en el sitio  $j$  tiene un costo fijo asociado igual a  $c_j$ . Además, existe un costo variable que es linealmente proporcional (constante de proporcionalidad es  $f$ ) a la cantidad total de gente que debe servir la estación. O sea, si se construye una estación en el sitio  $j$ , entonces el costo asociado es  $c_j + fs_j$ , en que  $s_j$  es la población total que debe servir la estación ubicada en  $j$  (es la suma de las poblaciones de todos los distritos asociados a esa estación). El presupuesto total destinado para construir las estaciones de bomberos es igual a  $B$  y no debe ser sobrepasado.

Formule un modelo de programación lineal binaria que minimice la distancia máxima entre un distrito y su respectiva estación.

---

<sup>1</sup>Asuma que  $a_{ij}$  es un parámetro conocido que vale 1 si una cámara instalada en la zona  $i$  puede vigilar la zona  $j$  y 0 sino.

## Modelamiento con Variables Mixtas

1. Una empresa de mudanzas dispone de  $M$  camiones, donde la capacidad del camión  $i$  es  $V_i$ . Para un día determinado esta empresa ha contratado mudanzas con  $N$  clientes distintos. La carga a transportar del cliente  $j$  es  $R_j$ .

Cada mudanza debe realizarse mediante un único flete y en cada flete no puede llevarse más de una mudanza. Un mismo camión puede hacer varios fletes en el día, siendo  $L_i$  el número máximo de fletes diarios que puede hacer el camión  $i$ . Si el camión  $i$  hace la mudanza del cliente  $j$  se tiene un beneficio  $B_{ij}$ .

Además, debe tomarse en cuenta que los clientes  $s$  y  $t$  deben ser atendidos por camiones diferentes y los clientes  $v$  y  $w$  deben ser atendidos por un mismo camión en viajes diferentes.

Por último, debe considerarse que si el camión  $M$  no fuera asignado a mudanza alguna en este día entonces puede contratarse para él un flete interurbano si así conviniera, cuyo destino puede ser La Calera, Valparaíso o Rancagua. El Beneficio del camión  $M$  al efectuar este único flete del día está dado por la expresión  $B + bx$ , donde  $B$  y  $b$  son constantes y  $x$  representa la distancia a recorrer en el viaje. La distancia a La Calera, Valparaíso y Rancagua es  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  respectivamente.

Con estos antecedentes construya un modelo matemático de programación lineal que asegure atender a todos los clientes y que maximice el beneficio diario de esta empresa.

2. Se le ha encomendado al Ministerio de Transporte la misión de disminuir la emisión de contaminantes (por parte de las micros de la capital) en  $H$  toneladas en los próximos  $T$  años (para efectos de esta pregunta asuma que hay sólo un contaminante que se mide en toneladas). Los ahorros en emisión de contaminante se producen sólo si una micro cambia su tecnología de combustión. Existen  $J$  tecnologías distintas y si la micro  $i$  se cambia a la tecnología  $j$  el máximo ahorro posible es  $V_{ij}$  por año.

Si bien el máximo ahorro posible es  $V_{ij}$ , puede ser conveniente ahorrar menos, ya que existe un costo variable asociado al ahorro de contaminante que depende de cuanto se ahorra. Por la primeras  $U_{ij}$  toneladas de contaminantes ahorradas por la micro  $i$  con la tecnología  $j$  en el período  $t$  se incurre en un gasto  $b_{ijt}$  (por tonelada). Por sobre  $U_{ij}$  se debe gastar  $h_{ijt}$  por tonelada, con  $h_{ijt}$  mayor que  $b_{ijt}$ .

Si el cambio de tecnología se hace en el período  $t$ , la respectiva empresa dueña de la micro debe desembolsar un monto fijo (inversión) de  $c_{ijt}$  pesos. Cada micro puede cambiar de tecnología a lo más una vez durante los  $T$  años y cada empresa  $k$  puede gastar un máximo de  $M_k$  pesos en inversiones de este tipo. En total en Santiago hay  $I$  micros y se conoce  $S_k$ , el subconjunto de micros que pertenecen a la empresa  $k$ .

Construya un modelo lineal mixto que determine cuánto debe ahorrar cada micro en cada período (y con qué tecnología) de manera que se cumpla la meta de ahorro en emisión de contaminante y se minimicen los costos totales.

### Indicaciones:

- El monto  $M_k$  es sólo aplicable a los costos fijos (inversiones).
- Si  $j$  corresponde a la tecnología actual que posee la micro  $i$ , entonces  $V_{ij}$  vale cero.

3. Una determinada empresa forestal puede producir  $L$  productos distintos y tiene  $I$  plantas productivas ubicadas en diferentes zonas, siendo  $S_{it}$  la capacidad total de producción de la planta  $i$  en el período  $t$  sin importar de que tipo de producto se trate. El tipo de producto  $l$  tiene un costo de producción de  $P_l$  sin importar la planta que lo fabrique ni el período en cuestión. Los productos son demandados por  $J$  ciudades diferentes, siendo  $D_{ijt}$  la demanda de la ciudad  $j$  por el producto  $l$ , en el período  $t$ . Las demandas deben satisfacerse período a período.

Como no existe la posibilidad de almacenar producto en las plantas, la empresa esta estudiando la posibilidad de arrendar bodegas ubicadas en diferentes puntos geográficos. El arriendo de las bodegas se hace período a período, esto quiere decir que si se arrienda la bodega  $k$  en el período  $t$ , no necesariamente la bodega  $k$  debe haber estado arrendada el período  $t - 1$  o seguir arrendada

para el período  $t + 1$ . Hay  $K$  posibles bodegas para arrendar. De esta manera, la producción de las plantas se llevará a las bodegas y desde allí se abastecerá a las ciudades. No existe inventario, las bodegas sólo se utilizan para etiquetar los distintos artículos. Si se arrienda la bodega  $k$  se incurre en un gasto fijo  $F_{kt}$  pesos por el pago del arriendo en el período  $t$ . Ahora bien, si se arrienda una bodega por 3 o más períodos consecutivos se recibirá un reembolso de  $W$  pesos. Por cada unidad del artículo  $l$  que ingresa a la bodega  $k$  se gasta  $E_{tk}$  pesos por concepto de etiquetación, la capacidad de la bodega  $k$  es de  $Q_k$  unidades de producto sin importar su tipo.

Además, se sabe que cada unidad debe ser abastecida desde una única bodega en cada período y también se sabe que la bodega  $k$  puede despachar como mínimo al total de ciudades que abastezca la cantidad de  $L_k$  y como máximo la cantidad de  $U_k$  unidades de artículos (del total de artículos que despacha). Si la bodega despacha más de  $U_k$  unidades de producto, se le debe pagar un bono extra a los empleados de esa bodega igual a  $B_k$  pesos fijos, independiente de la magnitud del exceso.

El costo de transporte del producto  $l$  desde la planta  $i$  a la bodega  $k$  en el período  $t$  es de  $M_{lkt}$  pesos y el costo de transporte desde la bodega  $k$  a la ciudad  $j$  del producto  $l$  en el período  $t$  es de  $N_{lkt}$  pesos.

Plantee un modelo de programación lineal mixto que permita determinar que bodegas deben arrendarse para que el costo de producción, transporte, arriendo y almacenamiento sea mínimo.

4. Suponga que usted que trabaja en la Gerencia de Marketing de una empresa y que le han pedido que defina las promociones que se realizarán durante los distintos meses del año para el producto estrella de la empresa. Estas promociones pueden ser, por ejemplo, distintas reducciones de precio (10%, 20%, etc.) por períodos breves, concursos y sorteos, regalos por la compra del producto, entre otros. Para esta planificación, la siguiente información es relevante:

- Cuenta con un presupuesto de  $B$  pesos para todo el año.
- En cada mes cuenta con  $H_m$  horas hombre de personal (por ejemplo, promotoras y vendedores).
- Existe un conjunto de  $N$  promociones posibles del cual usted puede seleccionar hasta  $n$  promociones para realizar en cada mes (este conjunto es el mismo para los distintos meses del año).
- En cada mes no se pueden efectuar más de  $n$  promociones.
- Una promoción  $i$  ( $i = 1 \dots N$ ) en el mes  $m$  necesitará un presupuesto de  $b_{im}$  pesos. Además si se realiza una promoción  $i$  en el mes  $m$ , las ventas aumentarán en  $vf_{im}$  pesos en dicho mes además de  $vu_{im}$  por cada hora hombre de personal de ventas incluido. (Nota: Si no se realiza ninguna promoción durante todo el año las ventas serán iguales a  $v_0$ .)

Formule un problema de programación lineal que al resolverlo le permita determinar el calendario óptimo de promociones, es decir, cuál es el conjunto de promociones que se deben llevar a cabo en cada mes y con qué dotación de personal asignado que le permite a usted maximizar las ventas totales del año.

5. La empresa de zapatos MEDIAHORA desea planificar su producción e inventarios para los próximos  $T$  períodos de modo de cumplir con la demanda esperada de sus clientes. Para esto, ha agregado sus productos en  $K$  familias y dispone de un estudio que predice que la demanda esperada por productos de la familia  $k$  en el período  $t$  será  $d_{kt}$ . La empresa sabe que el cuello de botella en el proceso productivo es la cantidad de horas de artesanos, siendo  $A_t$  la cantidad de horas de artesanos disponibles en el período  $t$ . Esta cantidad por temas de capacitación, no puede aumentar ni disminuir en el horizonte. Se sabe además que cada unidad de los productos pertenecientes a la familia  $k$  consume  $a_k$  horas de artesano.

La empresa posee una bodega con capacidad para almacenar  $B$  unidades en cada período. El costo de almacenar cada unidad de productos pertenecientes a la familia  $k$  en el período  $t$  es  $b_{kt}$ . Sin embargo, también existe la posibilidad de almacenar en bodegas de terceros, sin límite, pero a un costo por unidad para los productos pertenecientes a la familia  $k$  en el período  $t$  igual a  $g_{kt}$ .

- a) Plantee un modelo de programación lineal que permita encontrar la estrategia óptima para el problema de MEDIAHORA que tipo de modelo de programación lineal obtuvo?
- b) Comente la validez del modelo si  $g_{kt}$  fuese menor que  $b_{kt}$ , pero asumiendo que por política de la empresa la bodega de terceros sólo se puede ocupar cuando se ha copado la bodega propia. Que tipo de modelo estima necesario en este caso? Por qué?

## Solución de los Problemas de Modelamiento con Variables Binarias

1. Este tipo de problemas se conoce como problema de la mochila, ya que es equivalente a decidir que artículos meter a una mochila de capacidad limitada de modo de maximizar el beneficio

a) **Variables:**

$x_i$ : 1 si Mandinga será amigo de la candidata  $i$ , 0 en cualquier otro caso.

b) **Función Objetivo:**

$$\text{Max } Z = \sum_i b_i x_i$$

c) **Restricciones:**

- 1) No pasarse del límite de tiempo.

$$\sum_i c_i x_i \leq T$$

- 2) Naturaleza de las variables

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i.$$

2. Este tipo de problemas se conoce como el problema del vendedor viajero, porque equivale a resolver el problema de un vendedor que debe recorrer N casas en su recorrido, devolviéndose al punto de partida.

a) **Variables:**

$x_{ij}$ : 1 si el brazo mecánico va desde  $i$  a  $j$ , 0 en cualquier otro caso.

b) **Función Objetivo:**

$$\text{Min } Z = \sum_{i,j} t_{ij} x_{ij}$$

c) **Restricciones:**

- 1) Ingresar exactamente una vez a una conexión.

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j.$$

- 2) Salir exactamente una vez de una conexión.

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i.$$

- 3) No permitir que se realicen ciclos disjuntos.

$$\sum_{i \in S, j \in S} x_{ij} \leq \text{card}(S) - 1 \quad \forall S.$$

Con  $S$  el conjunto de todos los posibles ciclos, es decir, un  $S$  corresponde a todos los subconjuntos de  $i$  nodos posibles, otro  $S$  corresponde a todos los subconjuntos de  $i+1$  nodos, otro con  $i+2$ , así sucesivamente desde  $i = 1$  hasta  $i =$  (número total de nodos).  $\text{card}(S)$  corresponde a la función que entrega el cardinal o módulo de  $S$ .

- 4) Naturaleza de las variables

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j.$$

3. a) **Variables:**

$x_i$ : 1 si se instala una cámara en la zona  $i$ , 0 en cualquier otro caso.

- b) **Función Objetivo:**

$$\text{Min } Z = \sum_i c_i x_i$$

- c) **Restricciones:**

- 1) Vigilar todas las zonas con las cámaras.

$$\sum_i a_{ij} x_i \geq 1 \quad \forall j.$$

- 2) Naturaleza de las variables

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i.$$

4. a) **Variables de Decisión:**

$x_j$  : 1 si se construye una bomba en el distrito  $j$ . 0 en cualquier otro caso  
 $y_{ij}$  : 1 si distrito  $i$  es asignado a bomba en  $j$  es a. 0 en cualquier otro caso  
 $s_j$  : Cantidad de gente asignada a bomba en  $j$   
 $z$  : Máxima distancia entre un distrito y una bomba

- b) **Restricciones:**

- 1) Cada distrito debe ser asignado a una sola bomba.

$$\sum_j y_{ij} = 1 \quad \forall i$$

2) Solo se puede asignar distrito  $i$  a bomba  $j$  si esta esta contruida

$$y_{ij} \leq x_j \quad \forall i, j$$

3) Respetar presupuesto

$$\sum_j (x_j c_j + f s_j) \leq B$$

4) Cantidad de gente que debe ser servida por cada bomba.

$$s_j = \sum_i y_{ij} p_i \quad \forall i, j$$

5) Establecer la máxima distancia recorrida.

$$z \geq y_{ij} d_{ij} \quad \forall i, j$$

6) Naturaleza de las variables.

$$x_i, y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j$$

$$s_j, z \geq 0$$

c) **Función Objetivo:**

Minimizar la maxima distancia entre una bomba y su distrito asociado.

$$\text{mín } z$$

## Solución de los Problemas de Modelamiento con Variables Mixtas

1. a) **Variables:**

$w_{ij}$ : 1 si el camión  $i$  realiza la mudanza del cliente  $j$ , 0 en cualquier otro caso.

$\delta_{mk}$ : 1 si el camión  $m$  realiza un flete interurbano a la ciudad  $k$ , 0 en cualquier otro caso.

b) **Función Objetivo:**

$$\text{Max } Z = \sum_{ij} B_{ij} \cdot w_{ij} + \sum_{mk} (B + b \cdot D_k) \cdot \delta_{mk}$$

c) **Restricciones:**

1) Capacidad de los camiones.

$$\sum_j R_j \cdot w_{ij} \leq V_i \quad \forall i.$$

2) Cada cliente debe ser atendido por un sólo camión.

$$\sum_i w_{ij} = 1 \quad \forall j$$

3) Un camión debe hacer un número limitado de fletes al día.

$$\sum_j w_{ij} \leq L_i \quad \forall i.$$

4) Los clientes  $s$  y  $t$  deben ser atendidos por camiones diferentes.

$$w_{is} + w_{it} \leq 1 \quad \forall i.$$

5) Los clientes  $v$  y  $w$  deben ser atendidos por un mismo camión en viajes diferentes.

$$w_{iv} = w_{iw} \quad \forall i.$$

6) Si se realiza un viaje interurbano no se puede realizar mudanzas con ese camión.

$$\sum_j w_{mj} \leq L_i \cdot (1 - \delta_{mk}) \quad \forall k.$$

7) Sólo puede realizar a lo más un viaje interurbano en el día.

$$\sum_k \delta_{mk} \leq 1 \quad \forall m.$$

8) Naturaleza de las variables.

$$w_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j.$$

$$\delta_{mk} \in \{0, 1\} \quad \forall m, k.$$

2. a) **Variables:**

$x_{ijt}^m$ : ahorro en emisión de contaminantes de la micro  $i$  con la tecnología  $j$  en el período  $t$  para el tramo  $m$ .

$z_{ijt}$ : 1 si la micro  $i$  cambia a la tecnología  $j$  en el período  $t$ , 0 en cualquier otro caso.

b) **Función Objetivo:**

$$\text{Max } Z = \sum_{ijt} (b_{ijt} \cdot x_{ijt}^1 + h_{ijt} \cdot x_{ijt}^2) + \sum_{ijt} c_{ijt} \cdot z_{ijt}$$

c) **Restricciones:**

1) Cumplimiento de meta de reducción de contaminantes.

$$\sum_{ijtm} x_{ijt}^m \geq H$$

2) Sólo se producen ahorros si las micros cambian de tecnología.

$$\sum_m x_{ijt}^m \leq V_{ij} \cdot \sum_{\theta \leq t} z_{ij\theta} \quad \forall i, j, t.$$

3) Cantidad máxima de ahorro para el primer tramo.

$$x_{ijt}^1 \leq U_{ij} \quad \forall i, j, t.$$

4) Cada micro puede cambiar de tecnología a lo más una vez en el horizonte.

$$\sum_{jt} z_{ijt} \leq 1 \quad \forall i, j, t.$$

5) Presupuesto de inversión de cada empresa.

$$\sum_{tj} \sum_{i \in S_k} c_{ijt} \cdot z_{ijt} \leq M_k \quad \forall k.$$

6) Naturaleza de las variables.

$$x_{ijt}^m \geq 0 \quad \forall i, j, t, m.$$

$$z_{ijt} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, t.$$

3. a) **Variables:**

$z_{ilt}$ : número de unidades del producto  $l$  producidas en la planta  $i$  en el período  $t$ .

$x_{iklt}$ : número de unidades del producto  $l$  enviadas desde la planta  $i$  a la bodega  $k$  en el período  $t$ .

$f_{kjlt}$ : número de unidades del producto  $l$  enviadas desde la bodega  $k$  a la ciudad  $j$  en el período  $t$ .

$\delta_{kt}$ : 1 si se arrienda la bodega  $k$  en el período  $t$ , 0 en cualquier otro caso.

$w_{kjt}$ : 1 la bodega  $k$  abastece la ciudad  $j$  en el período  $t$ , 0 en cualquier otro caso.

$\gamma_{kt}$ : 1 si la bodega  $k$  despacha más de  $U_k$  unidades de producto en el período  $t$ , 0 en cualquier otro caso.

$\beta_{kt}$ : 1 si la bodega  $k$  al período  $t$ , lleva 3 o más días consecutivos arrendada, 0 en cualquier otro caso.

b) **Función Objetivo:**

$$\text{Max } Z = \sum_{ilt} z_{ilt} \cdot P_l + \sum_{kt} F_{kt} \cdot \delta_{kt} - \sum_{kt} W \cdot \beta_{kt} + \sum_{iklt} x_{iklt} \cdot E_{kt} + \sum_{kt} B_k \cdot \gamma_{kt} + \sum_{iklt} x_{iklt} \cdot M_{iklt} + \sum_{kjlt} f_{kjlt} \cdot N_{kjlt}$$

c) **Restricciones:**

1) Capacidades de producción de las plantas.

$$\sum_{kl} x_{iklt} \leq S_{it} \quad \forall i, t.$$

2) Satisfacción de la demanda.

$$\sum_k f_{kjlt} = D_{jlt} \quad \forall j, l, t.$$

3) Conservación de flujo en las bodegas.

$$\sum_i x_{iklt} = \sum_j f_{kjlt} \quad \forall k, l, t.$$

4) Capacidad de las bodegas.

$$\sum_{jl} f_{kjlt} \geq Q_k \cdot \delta_{kt} \quad \forall k, t.$$

5) Cada ciudad debe ser abastecida desde una sola bodega.

$$\sum_k w_{kjt} = 1 \quad \forall j, t.$$

6) Despacho mínimo de productos.

$$\sum_{jl} f_{kjlt} \geq L_k \cdot \delta_{kt} \quad \forall k, t.$$

7) Existencia de bono extra para los trabajadores.

$$\gamma_{kt} \geq \frac{\sum_{jl} f_{kjlt} - U_k}{M} \quad \forall k, t.$$

8) Existencia de reembolso.

$$\beta_{kt} \geq \frac{\sum_{\theta=t-3}^{t-1} \delta_{k\theta} - 2}{2} \quad \forall k, t = 4, \dots, T.$$

9) Conservación de flujo en las plantas.

$$z_{ilt} = \sum_k x_{iklt} \geq S_{it} \quad \forall i, l, t.$$

10) Relación entre las variables.

$$w_{kjt} \leq \delta_{kt} \quad \forall k, j, t.$$

$$f_{kjl} \leq D_{ljt} \cdot w_{kjt} \quad \forall k, j, l, t.$$

11) Naturaleza de las variables.

$$x_{ikt}, f_{kjl}, z_{ilt} \geq 0 \quad \forall i, k, j, l, t.$$

$$\delta_{kt}, \gamma_{kt}, \beta_{kt}, w_{kjt} \in \{0, 1\} \quad \forall k, j, t.$$

4. a) **Variables de Decisión:**

$x_{im}$  : 1 si se realiza promoción  $i$  en mes  $m$ . 0 en cualquier otro caso

$y_{im}$  : Cantidad de personal asignado a promoción  $i$  en mes  $m$

b) **Restricciones:**

1) Presupuesto.

$$\sum_{im} b_{im} \leq B$$

2) Cantidad máxima de empleados a utilizar

$$\sum_i y_{im} \leq H_m \quad \forall m$$

3) Solo asigno personal a promoción  $i$  en  $m$  si se ha decidido hacerla

$$y_{im} \leq Mx_{im} \quad \forall i, m,$$

con  $M \gg 1$ , en este caso el máximo valor que puede tomar  $M$  es  $H_m$

4) Máxima cantidad de promociones cada mes

$$\sum_i x_{im} \leq n \quad \forall m$$

5) Naturaleza de las variables.

$$x_{im} \in \{0, 1\} \quad \forall i, m$$

$$y_{im} \geq 0$$

c) **Función Objetivo:**

Máximizar las ventas

$$\text{máx} \sum_{im} v f_{im} x_{im} + \sum_{im} v u_{im} y_{im}$$

5. a) 1) **Variables de Decisión:**

$x_{kt}$  : cantidad de producción de  $k$  en  $t$

$y_{kt}$  : cantidad de inventario de  $k$  en  $t$  en bodega propia (inventario al termino de  $t$ )

$z_{kt}$  : cantidad de inventario de  $k$  en  $t$  en bodega de terceros (inventario al termino de  $t$ )

2) Restricciones:

a' Capacidad de producción.

$$\sum_k a_k x_{kt} \leq A_t \quad \forall t$$

b' Flujo de producción

$$y_{k,t-1} + z_{k,t-1} + x_{k,t} = d_{k,t} + y_{k,t} + z_{k,t} \quad \forall k, t$$

c' Capacidad de Bodega

$$\sum_k y_{kt} \leq B \quad \forall t$$

d' Naturaleza de las variables.

$$x_{kt} \in \{0, 1\} \quad \forall i, m$$

$$x_{kt}, y_{kt}, z_{kt} \geq 0$$

3) Función Objetivo:

Minimizar los costos

$$\text{mín} \sum_{kt} y_{kt} b_{kt} + z_{kt} g_{kt}$$

b) Este problema es complejo. Si el modelo se mantiene como en la parte (a) y g;b, siempre se llenarán primero las bodegas de terceros y como se tiene capacidad finita NUNCA se utilizarán las bodegas propias.

Es por esto que se debe agregar una nueva restricción para solucionar este problema. Esta restricción debe asegurar que se llene hasta su capacidad máxima la bodega propia para luego llenar la bodega de terceros.

Es necesario incluir una restricción y una variable binaria que sea capaz de producir este salto. Lo que genera un modelo mixto.

Sean:

$Y_t$  : cantidad de inventario total a guardar en bodegas propias en t

$Z_t$  : cantidad de inventario total a guardar en bodegas arrendadas en t

$\partial_t$  : 1 si se tiene que  $Y_t = B$ , 0 si  $Y_t < B$

Luego si tenemos que  $Y_t < B \Rightarrow (B - Y_t > 0) \Rightarrow (1 - \partial_t) = 1$

Esto lo podemos expresar como  $(B - Y_t) < (1 - \partial_t)M$  con  $M \gg 1$ . Ya que si  $\partial_t = 1$  entonces tenemos que en ese caso  $(B - Y_t) < 0$ , luego  $Y_t \geq B$ , pero como sabemos que  $Y_t \leq B$  entonces  $Y_t = B$

Agregando la restricción  $Z_t \leq \partial_t M, M \gg 0$  obligamos a que  $Z_t$  sea  $\geq 0$  solo cuando  $\partial_t = 1$

Dudas, consultas y comentarios a

[gmedina@ing.uchile.cl](mailto:gmedina@ing.uchile.cl)