INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesora: Daniel Espinoza, Gonzalo Romero

Auxiliares: Víctor Bucarey, Nelson Devia, Jocelyn González, Fernando Solari
Coordinador: Daniel Lillo E.

IN3701 – Optimización
Guia de Problemas
Control 1

Problema 1

a) Los próximos Juegos Olímpicos se llevarán a cabo en Chile dentro de T días, y se competirá en D disciplinas deportivas, cada una de las cuales requiere equipos de eq_d jugadores.

La delegación chilena cuenta con N deportistas, los cuales pueden desempeñarse en más de una disciplina, es más, cada uno tiene un talento innato de tal_{id} unidades de talento en la disciplina d. Sin embargo, por cada día que un deportista i dedique a entrenarse en la disciplina d, su talento se verá incrementado en Δtal_{id} unidades de talento.

Durante las fases preliminares, Chile logró clasificar sólo a algunas de las disciplinas, por lo que no podrá participar en las demás. Sea $clasif_d$ el parámetro[1] que indica si Chile clasificó a la disciplina d. Además, dentro de las que logró clasificar, debe reunir exactamente el número de jugadores necesario para formar el respectivo equipo, de lo contrario no podrá participar.

Se sabe que, debido a la particular actitud de los deportistas de nuestro país, cada uno de ellos está dispuesto a participar sólo en algunas disciplinas deportivas (sea p_{id} el parámetro[2] que indica si el deportista i está dispuesto a participar en la disciplina d) y se niega rotundamente a participar en las demás. Además, si se le dice que no participará en alguna de las disciplinas, no entrenará ni un solo día en aquel deporte.

Debido al gran número de disciplinas a disputarse, muchas de ellas toparán con otras, (los topes se conocen desde ya; sea $tope_{d_1 d_2}$ el parámetro[3] que indica si las disciplinas d_1 y d_2 topan), por lo que los deportistas no podrán ser parte de ambas disciplinas simultáneamente.

La organización ha decretado que cada país deberá elegir entre sus deportistas a un único abanderado, que se encargue de representar a su patria durante la ceremonia inaugural, lo cual le tomará un día debido a los preparativos. Este abanderado debe participar en al menos una disciplina. Se sabe, además, que algunos deportistas se niegan rotundamente a ser el abanderado, por lo que sólo puede

[1] Vale 1 si Chile clasifica y 0 si no.
[2] Vale 1 si el deportista está dispuesto y 0 si no.
[3] Vale 1 si hay tope y 0 si no.

escogerse a alguno que sí esté dispuesto a serlo. Sea q_i el parámetro[4] que indica si el deportista i está dispuesto a ser el abanderado.

La delegación chilena tiene el ambicioso objetivo de lograr el mayor rendimiento total posible en estos juegos, donde el rendimiento en una disciplina equivale a la suma de los talentos de los jugadores del equipo. Para ello, se le pide que plantee un modelo de programación lineal mixto que permita a la delegación tomar las mejores decisiones.

b) Suponga ahora que la delegación chilena entra en razón y se propone una meta más realista: "no hacer un papelón en ninguna disciplina", por lo que se requiere maximizar el mínimo rendimiento del país en estos juegos. Asuma que si Chile clasifica a una disciplina pero no se presenta, tendrá un rendimiento nulo en ella. ¿Cómo cambia su modelo?

Problema 2

Suponga que hay N monedas disponibles, y asuma que una unidad de la moneda i puede ser cambiada por r_{ij} de la moneda j. (Naturalmente $r_{ij} > 0$). Además, también hay ciertas regulaciones de seguridad que imponen un limite u_i en el monto total de la unidad i que pueden ser cambiadas en cualquier día. Supongamos que empezamos con B unidades de la unidad monetaria l. Queremos maximizar a través de transacciones la cantidad de unidades de monedas N.

Provea un modelamiento de programación lineal que resuelva este problema.

Nota: Asuma que para cualquier secuencia $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k$ de monedas, se tiene que $r_{1,2} * r_{2,3} \dots * r_{k,k-1} * r_{k,1} \leq 1$, o sea no se puede hacer multiplicar el dinero a través de cambios cíclicos de dinero.

Problema 3

El centro distribución de una cadena farmacéutica, se encarga de reunir fármacos desde distintos laboratorios, para luego repartirlos a diversos locales para su venta. La principal medida de calidad para este centro es el tiempo de entrega de estos pedidos.

Este centro tiene K operarios que diariamente reciben un conjunto J de pedidos con la cantidad y tipo de producto deseado por cada farmacia j. De modo que el funcionario responsable del pedido j debe juntar todo lo que se indica y preparar el encargo, el tiempo ocupado depende del pedido j y del operario k y según estudios realizados es igual a t_{jk} minutos. Por otro lado, el despacho a las farmacias se realiza mediante una muy eficiente empresa externa que lo transporta de inmediato a la sucursal, el tiempo en llegar se ha calculado en l_j minutos.

Si los operarios comienzan su día laboral exactamente a la misma hora (minuto 0), se pide encontrar la secuencia óptima de pedidos a realizar por cada operario, de modo que se minimice el tiempo en que el último encargo llega a su destino.

[4] Vale 1 si el deportista está dispuesto y 0 si no.

Problema 4

Luego que la ciudad de Chaitén fuese evacuada, el Gobierno de Chile determinó que es inhabitable, y para dar una solución a los chaiteninos, la presidencia designó algunas comisiones para investigar las posible reubicación de la ciudad.

En primer lugar designó una comisión para que determinara las necesidades básicas de una ciudad, la qué concluyó que se necesitaba un colegio, un hospital, una comisaría y suficientes casas para los habitantes. La segunda comisión designada por la presidencia averiguó sobre los factores demográficos de la población y censó I personas, que se dividían en tres grupos principales: niños (N), adultos (A) y adultos mayores (V). Además pudo determinar mediante un coeficiente binario si un par de personas eran del mismo núcleo familiar. (Fab es 1 si la persona a y la persona b son de la misma familia y 0 en caso contrario, nótese que Fab=Fba) De esta manera cada familia debe vivir en una misma casa. La Comisión de Obras Civiles en conjunto con la de Paisajismo determinaron que existían J sitios en el lugar que reemplazaría a Chaitén. Donde el sitio jh es ideal para construir un hospital y el sitio jc es ideal para construir un colegio. La siguiente comisión, Comisión Seguridad, pudo calcular una distancia máxima a la cual debe estar la policía de cualquier sector de la ciudad (Dpolicía). Y por otra parte la Comisión Salud analizó que todos los adultos mayores no podían estar más lejos del hospital que una distancia máxima (DHospital).
Luego, como la educación una de las prioridades del Gobierno se le pide a usted que logre ubicar a todas las personas en la nueva ciudad y que minimice la máxima distancia que recorre un niño para ir al colegio (es decir, minimizar la distancia que recorre el niño que vive más lejos del colegio).

Datos:

- La distancia entre el sitio j y j´ es djj´
- El número de sitios es igual a la cantidad de familia más 3 (comisaría, colegio, hospital)

Hint: Cree una variable auxiliar que vaya distinguiendo la máxima distancia entre el colegio y un niño.

Problema 5

Una empresa de zapatillas desea planificar su producción e inventarios para los próximos T periodos de modo de cumplir con la demanda esperada de sus clientes. Para esto, ha agregado sus productos en K familias y dispone de un estudio que predice que la demanda esperada por productos de la familia k en el período t será d_{kt}.
La empresa sabe que el cuello de botella en el proceso productivo es la cantidad de horas de artesanos, siendo A_t la cantidad fija de horas de artesanos disponibles en el periodo t. Se sabe además que cada unidad de los productos pertenecientes a la familia k consume a_k horas de artesano.
La empresa posee una bodega con capacidad para almacenar B unidades en cada periodo. El costo de almacenar cada unidad de productos pertenecientes a la familia k

en el periodo t es b_{kt}. Sin embargo, también existe la posibilidad de almacenar en bodegas de terceros, sin límite, pero a un costo por unidad para los productos pertenecientes a la familia k en el periodo t igual a g_{kt}.
Suponga que g_{kt} es menor que b_{kt}, pero por política de la empresa la bodega de terceros sólo se puede ocupar cuando se ha copado la bodega propia.
Plantee un modelo de programación lineal entera que satisfaciendo la demanda minimice los costos de la empresa.

Problema 6

Suponga que usted es el dueño de una fábrica de bicicletas, y sabe que debe satisfacer la demanda que enfrenta para los próximos T meses. Esta demanda la ha estimado en D^t unidades para el mes t.

Actualmente la empresa presenta los siguientes costos de producción:

- Un costo fijo de K para cada mes.
- Un costo unitario de producción de c^t para cada mes.

Además, cuenta con una capacidad máxima de producción de Q_m unidades igual para todos los periodos, y en cualquier periodo puede decidir cambiar la tecnología de producción que está siendo utilizada, lo cual modificará los costos unitarios de producción a c^{ta}, con $c^{ta} < c^t$, y la capacidad máxima de la empresa a Q^{tm}. La implantación de esta nueva tecnología obliga a la empresa a incurrir en un costo de I.

Cabe destacar que una vez que se ha realizado el cambio tecnológico no es posible regresar a la tecnología original, que la inversión es realizada una única vez y que el producto no se puede almacenar en bodega.

Adicionalmente, usted posee convenios con la competencia que le permiten comprar unidades de producto terminado a un precio de P, con $P > c^t$ para todo t. Con esta información responda:

1. Formule un modelo de programación lineal entera mixta que permita determinar las acciones que se deben realizar a lo largo del período de planificación con el fin de minimizar los costos en que debe incurrir la empresa para satisfacer la demanda.
2. ¿Cómo cambia su respuesta si ahora se permite realizar inventario de productos, asumiendo que el costo asociado de b_t por unidad almacena desde el periodo t al t+1, y un inventario máximo de B unidades?

Problema 7

El conocido magnate Leonardo Arcas ha decidido mostrar al mundo su talento musical, y para ello, va a presentarse en un prestigioso certamen internacional. Lo más importante para él es la admiración del público, la cual se mide en aplausos.

Para su presentación, el señor Arcas debe decidir qué instrumentos usar y por cuánto tiempo tocará cada uno, ya que sólo tiene T minutos para estar sobre el escenario. En su mansión posee N instrumentos y sabe que para cada instrumento i tiene un talento d_i [u.t.] (unidades de talento) del mismo. Además, debe tocar al menos K instrumentos distintos, dada su auto-denominación de "hombre orquesta". El multimillonario también tiene la opción de cantar, aunque para ello no tiene talento.

El público se divide en J sectores, cada uno de los cuales tiene distintas preferencias musicales. Lo anterior se traduce en que cada sector j se deleita en g_{ij} [u.s.] (unidades de satisfacción) por oír tocar el instrumento i, y en g_j [u.s.] por oír cantar. Sin embargo, en cada sector hay personas impacientes que generarán p_{ij} pifias por cada minuto que oigan el instrumento i y p_j pifias por cada minuto que oigan cantar. Suponga que cada pifia descuenta un aplauso, es decir, se miden en las mismas unidades. Leonardo no puede permitir que el total de pifias supere el nivel P, ya que esto afectaría irremediablemente su popularidad.

Cada sector j del público emitirá una cantidad de aplausos equivalente a su deleite por oír tocar cada instrumento (o el canto), independiente de su duración, y una cantidad equivalente al talento del artista en tal instrumento (o el canto) por cada minuto que dure.

Como a Leonardo Arcas le interesa su popularidad en cada sector del público, él desea maximizar la mínima cantidad de aplausos obtenida entre todos los sectores. Plantee un modelo de programación lineal que permita al acaudalado personaje tomar las mejores decisiones para lograr su objetivo.

Problema 8

(Centro de Chebychev) Considere un conjunto P descrito por un conjunto de restricciones lineales, esto es:

$$P = \{x \in R^n \mid a_i * x \ \leq b_i, i = 1, .., m\}$$

Una bola de centro ***y*** y radio **r** es definida como el conjunto de todos los puntos a distancia euclidiana ***r*** de ***y.***

Nos interesa encontrar una bola con el mayor radio posible, la cual está contenida completamente en P (el centro de esa bola es llamado el centro de Chebychev del conjunto P). Provea un modelo de programación lineal de este problema.

Problema 9

La Compañía de Entregas, BST, debe hacer envíos a 10 clientes cuyas respectivas demandas son dj para j=1,2,…,10.
La compañía tiene cuatro camiones disponibles con capacidades Lk y un costo diario de operación ck, k=1,..4.
Un camión solo no puede entregarle a mas de 5 clientes, y los pares de clientes {1,7}, {2,6}, y {2,9} no pueden ser visitados por el mismo camión.

Formule un modelo que determine que camiones usar para minimizar los costos de entrega a todos los clientes.

Problema 10

El recién electo presidente de Estados Juntos, Baraki Obamu, ha decidido reestructurar la localización de los colegios en el estado de Mazachuset.

N es el conjunto de ciudades que hay que considerar; el subconjunto C de N contiene las ciudades donde puede haber un colegio (en una ciudad puede haber máximo un colegio).

C1 es el subconjunto de C donde ya existe un colegio.

En la ciudad i hay Ei estudiantes que tienen que ir a un colegio. Ningún estudiante puede viajar más de L kms.

Dij es la distancia en kms entre las ciudades i y j; i,j $\in$ N (se puede asumir Dii=0). Los colegios existentes (colegio tipo 1) tienen una capacidad para E estudiantes.

Hay un nuevo tipo de colegio (colegio tipo 2) que tiene capacidad para EM estudiantes (E<EM). El costo para construir un colegio del tipo t es de Ct UM (unidades monetarias), t=1,2. Se pueden construir colegios tipo 1 o 2.

El costo para cerrar un colegio existente es de CE UM. Para la reestructuración de los colegios hay un presupuesto de PPTO UM.

Plantee un PPL que determine dónde cerrar y dónde construir colegios y que además asigne a los estudiantes a un colegio.

Suponga como función objetivo la minimización del costo total de la reestructuración.

¿Cómo cambia el modelo si en vez de minimizar el costo total se quiere minimizar la distancia total que tienen que viajar todos los alumnos?

Problema 11

Considere un camino dividido en N segmentos que son iluminados por M lámparas. Sea Pj la potencia de la lámpara j-ésima. La iluminación Ii del i-ésimo segmento se asume que es $\sum_{j=1}^{M} a_{ij} p_j$ donde a_{ij} son coeficientes conocidos. Sea I*i la iluminación deseada para el segmento i.

Nos interesa elegir lámparas pj tal que la iluminación Ii sea la más cercana a la deseada. Notar que el enunciado de este problema es abierto, por lo que puede haber más de una formulación.

Problema 12
(Plan de producción e inventario)

Una compañía debe entregar d_i unidades de su producto en el mes i- ésimo. El material producido en un mes cualquiera puede ser enviado al final de cada mes o puede ser guardado en bodega y ser enviado al final de un mes subsiguiente; de todos modos, hay un costo de bodegaje de c1 pesos por mes por cada unidad de producto mantenido en bodega.

El año comienza con el inventario vacio. Si la compañía produce x_i unidades en el mes i y x_{i+1} unidades en el mes i+1, esta incurre en un costo $c_2|x_{i+1} - x_i|$ pesos, lo cual refleja el costo de cambiar a un nuevo nivel de producción.

Asuma que el inventario sobrante al final de año no tiene valor y no se incurre en ningún gasto de bodegaje.

Provea un modelamiento lineal que minimice costos de producción y de inventario en un periodo de doce meses.

Problema 13

Considere el problema de una empresa importadora. La empresa trabaja con M bodegas en distintas regiones. Tiene N clientes, a lo largo de Chile. Las bodegas las puede arrendar a un costo fijo C_{jt}, si arrienda la bodega j en el periodo t. Cada cliente i se le debe entregar un volumen D_{it} en el periodo t. El costo de mantener en bodega j una unidad del periodo (t al t+1) es E_{jt}, y de enviar una unidad de la bodega j al cliente i en t es R_{jit}. Hay un costo P_{jt} por enviar una unidad de puerto a la bodega j en t Las decisiones entonces son: qué bodegas arrendar en cada período, cuanto enviar de puerto a cada bodega en cada periodo, cuanto guardar en cada bodega que está arrendada para el próximo período, y cuanto enviar a los distintos clientes. La bodega j tiene capacidad CAPj para guardar.

a) Plantee un modelo de PL con variables 0-1 para resolver este problema a costo mínimo

b) Como cambia el modelo si cada cliente debe estar asociado a lo más a 3 bodegas (esto implica que para cada cliente una de sus tres bodegas debe estar abierta siempre)

Problema 14
Decisión sobre instalaciones

Uno de los principales problemas de diseño urbano es la localización de servicios de emergencia, como por ejemplo el caso de compañías de bomberos. Para decidir sobre las ubicaciones más convenientes para este tipo de estaciones supondremos una ciudad dividida en *I* comunas, siendo *pi* la cantidad de habitantes de la comuna *i*.

Estudios preliminares han establecido que existen sólo *J* sitios dentro de la ciudad donde pueden ser ubicadas las compañías de bomberos, y que desde cada sitio sólo se puede llegar a un grupo reducido de comunas. Considere la existencia de un

parámetro α_{ij} que toma valor 1 si se puede llegar desde el sitio *j* a la comuna *i*, y 0 si no.
Además, se sabe que d_{ij} es la distancia entre el centro de la comuna *i* y el sitio *j*. Construir una estación en el sitio *j* tiene un costo fijo igual a c_j y un costo variable que es proporcional, con constante de proporcionalidad *f*, a la cantidad total de personas que debe servir, es decir, proporcional a la suma de las poblaciones de todas las comunas asociados a la estación en *j*.
Actualmente se dispone de un presupuesto total *B* destinado a la construcción de las compañías de bomberos de la ciudad.

Formule un modelo de programación lineal binaria que minimice la distancia máxima entre una comuna cualquiera y su respectiva estación de bomberos. Tenga en cuenta que su modelo debe permitir seleccionar los sitios en los cuales construir estaciones de bomberos de manera que cada comuna tenga al menos una compañía asociada y se respete la restricción presupuestaria existente.