

Formulando con modelos lineales enteros

Dpto. Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

IN3701, Optimización

12 de marzo de 2009

Contenidos

- 1 Forma de un problema Lineal Entero
- 2 Modelando con variables binarias

Problema de optimización lineal entero (MILP)

$$\text{máx} cx + hy \quad (1a)$$

$$\text{s.t.} Ax + Gy \leq b \quad (1b)$$

$$x \in \mathbb{Z}^n, y \in \mathbb{R}^p \quad (1c)$$

- x, y son las variables del problema.
- (1) se dice **mixto** por que tiene variables enteras y continuas.
- (1a) es la función objetivo (lineal en las variables).
- (1b) son las restricciones del dominio (lineales en las variables).
- (1c) el dominio general de las variables ($\mathbb{R}^n$ y/o $\mathbb{Z}^n$).
- Los $S := \{x, y\}$ que satisfacen (1b) y (1c) es el **conjunto factible**.
- Si este conjunto es vacío, el problema se dice **infactible**.
- Una **instancia** de (1) se especifica por los datos (c, h, A, G, b) .
- Un $(x_0, y_0) \in S$ es un **punto factible**.
- $(x_0, y_0) \in S$ es **óptimo** si $cx_0 + hy_0 \geq cx + hy \quad \forall (x, y) \in S$.
- (1) es equivalente a un problema de minimización, ¿por que?

Algunas observaciones:

- Restricciones de igualdad, menor o igual, y mayor o igual, calzan la forma general de (1). ¿Como?
- Una instancia factible de (1) puede no tener solución óptima, ¿por que?
- En este caso la instancia se dice **no acotada**.
- **Resolver** una instancia de (1) es determinar si esta es:
 - Infactible.
 - No acotada.
 - Óptima.
- En algunos casos (1c) se escribe como $x \in \{0, 1\}^n, y \in \mathbb{R}^p$, en estos casos (1) se dice **binario** (binary-MILP).

Modelos lineales continuos:

- Modelaremos las siguientes situaciones usando tres variables positivas y continuas x, y, z .
 - “Por cada unidad de x deben haber al menos 5 unidades de y ”.
 - $x \leq \frac{1}{5}y$.
 - “Por cada 7 unidades de x deben haber 9 unidades de y ”.
 - $\frac{1}{7}x = \frac{1}{9}y$.
 - Un puerto puede cargar 11 unidades de x , o 45 de y o 30 de z por semana. ¿Qué combinaciones de x, y, z puede cargar en 10 semanas?
 - $\frac{1}{11}x + \frac{1}{45}y + \frac{1}{30}z \leq 10$.
 - “Componente x debe ser al menos un 33 % de los componentes x, y, z ”
 - $x \geq 0,33(x + y + z) \iff 0,67x \geq 0,33(y + z)$
 - “Proceso I transforma una unidad de x en 24.5 unidades de y y 73.1 unidades de z ”
 - $y = 24,5x, \quad z = 73,1x$.
 - “Si x, y, z tienen 30,90,5 % de L , ¿que mezclas de x, y, z tienen al menos 20 % de L ?”
 - $0,3x + 0,9y + 0,05z \geq 0,3(x + y + z)$.

Variables binarias para alternativas

- Situaciones donde uno u otro evento deben ocurrir.
- Para este tipo de dicotomías se usa:

$$x = \begin{cases} 1 & \text{evento ocurre} \\ 0 & \text{evento no ocurre} \end{cases}$$

Problema de la Mochila (Knapsack)

Tenemos n posibles proyectos, cada uno requiere una inversión a_j y un retorno c_j , y tenemos una restricción presupuestaria de b . Los proyectos deben realizarse completamente para obtener el beneficio. ¿Qué proyectos deben llevarse a cabo?



$$\text{máx} \left\{ \sum_{i=1}^n c_i x_i : \sum_{i=1}^n x_i a_i \leq b, x \in \{0, 1\}^n \right\}$$

- ¿Qué tan distinta es la solución si x es continua?

Variables binarias para alternativas

Problema de asignación (Matching bi-partito)

Tenemos m trabajos y n personas a las cuales asignarlos ($m \leq n$). Cada trabajo debe ser asignado a una persona, y cada persona puede trabajar a lo más en un trabajo. El costo de asignar trabajo j al trabajador i es c_{ij} . Queremos buscar la asignación de todos los trabajos a costo mínimo.

- Defina $x_{ij} \in \{0, 1\}$ representando asociar trabajo j al trabajador i .
- ¿Que restricciones son necesarias?
- ¿Cuál es la cardinalidad de los puntos factibles?

Matching perfecto

Tenemos $2n$ trabajadores, y debemos formar n parejas de trabajo maximizando el beneficio global (de la empresa).

Variables binarias para alternativas

Set Covering, Set Packing, Set Partitioning

Consideremos un conjunto base $\mathcal{M} = \{1, \dots, m\}$, y poseemos una serie de sub-conjuntos $\{\mathcal{M}_j\}_{j=1}^n$, $\mathcal{M}_j \subseteq \mathcal{M}$.

- Decimos que $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ **cubre** $\mathcal{M}$ si $\bigcup_{i \in J} \mathcal{M}_i = \mathcal{M}$.
- Decimos que $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ es un **packing** en $\mathcal{M}$ si $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \emptyset \quad \forall i, j \in J$.
- Decimos que $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ es una **partición** en $\mathcal{M}$ si es un covering y un packing a la vez.

¿Cómo describimos todos los J que son un *covering*, *packing*, *partition* en $\mathcal{M}$?

Ejemplo:

Consideremos el problema de colocar estaciones de bomberos en una ciudad, y queremos asegurar un tiempo de respuesta de no mas de 10 minutos? y si queremos k cobertura?

Modelando otras relaciones

- Ya modelamos como a lo más un evento puede ocurrir:
 - $\sum_{i=1}^n x_i \leq 1.$
- Si dos eventos deben ocurrir en forma simultanea o no ocurrir:
 - $x_i - x_j = 0.$
- Si un evento es necesario para que otro ocurra:
 - $x_i \leq x_j.$
- x ocurre si y sólo si y y z ocurren:
 - $x \leq y, \quad x \leq z, \quad x + 1 \geq y + z.$
- x ocurre si y sólo si y o z ocurren:
 - $x \geq y, x \geq z, x \leq y + z.$
- Consideremos una actividad que puede desarrollarse dentro de niveles $0 \leq y \leq u$, pero sólo si el evento x ocurre:
 - $0 \leq y, y - ux \leq 0.$

Modelando otras relaciones

Problema de ubicación de instalaciones

Consideremos $I = \{1, \dots, m\}$ un conjunto de clientes, y un conjunto de posibles locación de instalaciones $N = \{1, \dots, n\}$. Abrir instalación $j \in N$ cuesta c_j . Atender al cliente $i \in I$ desde $j \in N$ cuesta h_{ij} .

- ¿Cómo modelamos el problema?
- ¿Que pasa si hay capacidades por instalación $\{d_j : j \in N\}$ y demanda $\{d_i : i \in I\}$?
- ¿Y si además hay costo variable $\{v_{ij} : i \in I, j \in N\}$ dependiendo de la demanda?

Modelando otras relaciones

Flujo en redes con costo fijo

Consideremos una **red** o **grafo** $G = (V, E)$, donde $V = \{1, \dots, n\}$ se llaman **nodos** y $E \subseteq V \times V$ se llaman **arcos** o **aristas**.

Si $e = (u, v) \in E$ entonces existe una ruta directa para ir de u a v (pero no necesariamente de v a u).

Asociado a cada nodo $v \in V$ existe una demanda d_v . Un nodo v es una fuente, punto de transito o punto de demanda dependiendo si d_v es negativo, cero o positivo respectivamente. Asumimos que la demanda neta es cero ($\sum_{v \in V} d_v = 0$).

Cada arco $e \in E$ tiene una capacidad $u_e \geq 0$ y un costo de transporte unitario h_e .

- ¿Cómo definiría un **flujo** factible para la red?
- ¿Cómo modelaría la existencia de costos fijos c por uso de rutas (arcos) y/o nodos?

Modelando otras relaciones

Problema del Vendedor Viajero

Consideramos un grafo $G = (V, E)$. Los nodos representan ciudades y los arcos $e = (u, v) \in E$ la posibilidad de viaje directo entre las ciudades u y v . Cada arco $e \in E$ tiene asociado un costo c_e .

El objetivo es encontrar un tour que, partiendo de la ciudad 1, visita todas las ciudades exactamente una vez volviendo a la ciudad de partida, a costo mínimo.

- Usando variables por arco, formule el problema.
- ¿Cuántas restricciones necesitamos?
- ¿Cuál es el número mínimo necesario?
- ¿Hay formulaciones mas compactas?

Funciones no-lineales y restricciones disyuntivas

- ¿Qué pasa si la función objetivo no es lineal?
 - Consideraremos funciones objetivos del tipo $f = \sum_{i \in N} f_i(y_i)$.
 - f se dice **separable**.
 - Cada f_i es no lineal.
 - Basta considerar f_i lineal por trazo?
 - ¿por que?
 - ¿Qué pasa si f no es separable?
- ¿Qué sucede si en vez de requerir que **todas** las restricciones se cumplan, nos basta que se cumplan k de ellas?
 - ¿Por qué podría ser esto interesante?
 - Este tipo de relaciones se llaman **disyuntivas**.

Funciones lineales por trazo

- Asumamos que f es lineal por trazo y continua:
 - f puede ser descrita por los puntos $\{a_i, f(a_i)\}_{i=1}^n$ donde $a_i \leq a_{i+1}$.
 - Note que todo $a_1 \leq y \leq a_r$ puede escribirse como

$$y = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_i \geq 0.$$
 - Dado y , la representación en términos de λ no es única.
 - Si embargo, si $a_i \leq y \leq a_{i+1}$, podemos escoger λ tal que $\lambda_j = 0 \quad \forall j \neq \{i, i+1\}$.
 - Bajo este supuesto $f(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i)$.
 - Definiendo el evento “ y esta en el intervalo $[a_i, a_{i+1}]$ ”, modele las condiciones anteriores.
 - Si minimizamos f lineal por trozo convexa, las variables binarias anteriores no son necesarias.
 - ¿Qué sucede si f es discontinua?
 - ¿Hay otras formulaciones? ¿Son mejores? ¿En qué sentido?
 - ¿Podemos, en general, usar menos que $n - 1$ variables binarias?

Restricciones Disyuntivas

- Consideremos la siguiente situación: queremos definir $y = \min\{u_1, u_2\}$.
 - Podemos modelar esto como $y \leq u_1, y \leq u_2$ y la restricción disyuntiva $y \geq u_1$ o $y \geq u_2$.
- En general queremos describir un punto satisfaciendo al menos k de m conjunto de restricciones, en el ejemplo $m = 2, k = 1$.
 - Supongamos $P^i := \{y \in \mathbb{R}_+^p : A^i y \leq b^i, y \leq d\}$ para $i = 1, \dots, m$.
 - Note que $P^i \subseteq \{y \in \mathbb{R}^p : 0 \leq y \leq d\} = Y$.
 - Implica que existe w^i tal que $A^i y \leq b^i + w^i \quad \forall y \in Y$.
 - Usando el evento " $y \in P^i$ ", modele la restricción disyuntiva general.
- Para el caso $k = 1$ existe una formulación alternativa:
 - Consideramos $\sum_{i=1}^m y^i = y, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1$.
 - ¿Cuál formulación es mejor?
- ¿Qué pasa si queremos modelar que a lo más k de m conjuntos de restricciones se satisfacen?

Restricciones Disyuntivas

Problema de Secuenciamiento

Considere que tenemos n trabajos y m máquinas. Cada trabajo debe pasar por cada máquina. Para cada trabajo, el orden en que pasa por cada máquina es pre-establecido, es decir, el trabajo j debe partir por la máquina $j(1)$ y terminar en la máquina $j(m)$. Cada trabajo j demora un tiempo p_{jk} en la máquina k . Cada máquina puede procesar un solo trabajo, y una vez comenzado un trabajo, debe finalizarlo. El objetivo es minimizar la suma de los tiempos de finalización de los trabajos.

- Sea t_{jk} el tiempo de término del trabajo j en la máquina k .
 - $t_{j,j(r+1)} \geq t_{j,j(r)} + p_j, j(r) \quad \forall j, r.$
 - Dada una máquina k y dos trabajos i, j , siempre es cierto que “ i se procesa antes que j ” o “ j se procesa antes que i ”.
 - Definimos $x_{ijk} = 1$ si lo primero es cierto, y cero si no.
 - Necesitamos $m \binom{n}{2}$ variables binarias $\mathcal{O}(m \binom{n}{2})$ restricciones.
 - Modelo alternativo para el TSP. ¿Cómo?
 - Difícil de resolver para problemas de interés práctico.