INGENIERÍA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs: Daniel Espinoza
Gonzalo Romero
Auxs: Víctor Bucarey
Nelson Devia
Jocelyn González
Daniel Lillo
Fernando Solari

Control 3 IN3701

18 junio 2009

Pregunta 1

El exitoso director técnico nacional, Miguel Tenderini, ha sido contratado por el prestigioso equipo de hándbol Real Mandril, el cual cuenta con un conjunto N de jugadores, todos estelares. Se le ha encomendado la misión de escoger las contrataciones para la próxima temporada de entre un conjunto M de posibles jugadores, cada uno de los cuales tiene un precio p_i con $i \in \{N+1, ..., N+M\}$, y para ello se le ha otorgado un presupuesto de $PPTO$ euros.

La temporada se compone de J partidos, en cada uno de los cuales, Tenderini debe decidir el conjunto jugadores que participará de él, tanto como titular o como suplente, suponga que debe haber T jugadores titulares y B jugadores suplentes por partido. Se estima que g_{ij}^k es la cantidad de goles que anotará el jugador i en el partido j si entra como k (con $k \in \{Titular, Suplente\}$). Suponga que todos los suplentes entran al partido en algún momento.

Tenderini recibirá un bono al final de la temporada según la cantidad total g de goles anotados, consistente en $s_1[euros/gol]$ si este total queda en el intervalo $[0, G]$ y $s_2[euros/gol]$ por cada gol adicional a G, es decir, su bono será:

$$Bono = \begin{cases} s_1 \cdot g & \text{si } g \leq G. \\ s_1 \cdot G + s_2 \cdot (g - G) & \text{si } g > G. \end{cases}$$

Suponga que ya se contrató al famosísimo jugador Kakú, por lo que parte del presupuesto ya fue utilizado, y que se le prometió que sería titular en al menos el 75 % de los partidos.Además, cada jugador tiene una resistencia física que le permite jugar a lo más t_i partidos como titular y b_i partidos como suplente.

Plantee un modelo de programación lineal que le permita a Miguel Tenderini maximizar el monto del bono que recibirá al final de la temporada.

Pregunta 2

1. (2 ptos.) Desarrolle un algoritmo que permita decidir si la solución óptima de un problema de flujo máximo es igual a infinito. El algoritmo debe aprovechar la estructura del problema.

2. (2 ptos.) Considere que debe resolver un problema de flujo máximo del nodo s al nodo t, y que sólo cuenta con un algoritmo especializado en el problema de flujo a costo mínimo. ¿Puede transformar el problema original en uno de flujo a costo mínimo, de modo que la solución óptima obtenida resuelva el problema original?

3. (2 ptos.) Considere un juego en el que en cada jugada se pueden obtener 0, 2 o 3 puntos. Suponga que un jugador ha completado 11 puntos, queremos saber cuál es la mínima cantidad de jugadas en la que el jugador podría haber obtenido su puntaje.

   Modele el problema como un problema de camino más corto. Explique detalladamente que representan los nodos y los arcos de la red, así como los costos de los arcos.

Bonus (1 pto.)

Modifique el algoritmo Dijkstra (one to all) para que entregue las distancias mínimas desde todos los nodos a uno en particular (all to one).

INGENIERÍA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs: Daniel Espinoza
Gonzalo Romero
Auxs: Víctor Bucarey
Nelson Devia
Jocelyn González
Daniel Lillo
Fernando Solari

Control 3 IN3701

18 junio 2009

Pregunta 1

Variables (1 pto.):

$x_i = \begin{cases} 1 & \text{Si se contrata al jugador } i. \\ 0 & \sim \end{cases}$

$y_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{Si el jugador } i \text{ juega el partido } j \text{ como } k. \\ 0 & \sim \end{cases}$

$z =$ cantidad de goles totales
$z_1 =$ cantidad de goles en $[0, G]$
$z_2 =$ cantidad de goles en (G, ∞)

Restricciones:

1. (0.4 ptos.) Naturaleza de las variables:
   $x_i, y_{ij}^k \in \{0, 1\}\ \forall i, j, k$
   $z, z_1, z_2 \in Z_0^+$
2. (0.4 ptos.) Respetar el presupuesto
   $\sum_{i \in M} x_i p_i \leq PPTO$
3. (0.4 ptos.) Un jugador debe contratarse para poder jugar
   $y_{ij}^k \leq x_i\ \forall j, k$
4. (0.4 ptos.) Un jugador no puede ser titular y suplente en un mismo partido
   $y_{ij}^{TIT} + y_{ij}^{SUP} \leq 1\ \forall i, j$
5. (0.6 ptos.) Cantidad de titulares y suplentes por partido
   $\sum_i y_{ij}^{TIT} = T\ \forall j$
   $\sum_i y_{ij}^{SUP} = B\ \forall j$
6. (0.4 ptos.) Definición de z
   $z = \sum_{i,j,k} y_{ij}^k g_{ij}^k$

7. (0.4 ptos.) Definición de z_1 y z_2

   $z_1 \leq G$

   $z = z_1 + z_2$

8. (0.4 ptos.) Kakú ya fue contratado y juega al menos el 75 % de los partidos como titular

   $x_{kaku} = 1$

   $\sum_j y_{kaku,j}^{TIT} \geq 0{,}75 \cdot |J|$

9. (0.6 ptos.) Capacidad física de los jugadores

   $\sum_j y_{ij}^{TIT} \leq t_i \ \forall i$

   $\sum_j y_{ij}^{SUP} \leq b_i \ \forall i$

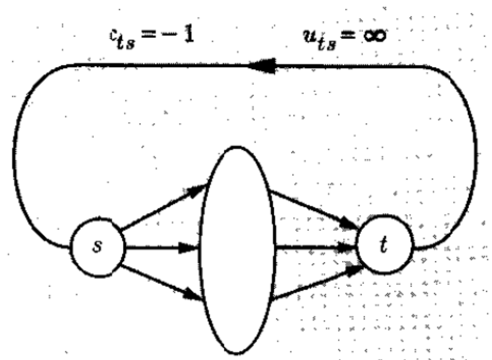
Función objetivo (1 pto.):

$$Max\ z_1 \cdot s_1 + z_2 \cdot s_2$$

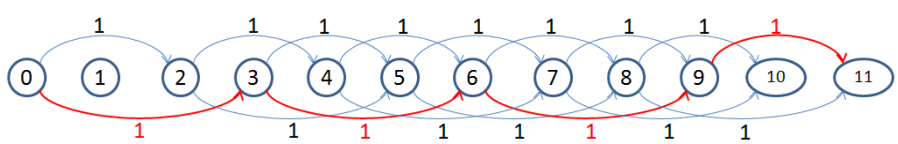
Pregunta 2

1. Existe un flujo máximo de valor ∞ si y sólo si existe un camino aumentante P de s a t con $\delta(P) = \infty$, donde s y t son el nodo de origen y de destino de la red respectivamente. Considere una variante del algoritmo de marcado, donde en vez de aceptar arcos no saturados cuando se escanea un nodo, sólo se aceptan arcos dirigidos hacia adelante con capacidad infinita. Es claro que este algoritmo modificado encontrará un camino $s - t$ de capacidad infinita si y sólo si este tipo de camino existe.

2. El problema de flujo máximo se puede reformular como un problema de flujo a costo mínimo de la siguiente manera: fijando el costo de todos los arcos de la red en 0, y agregando un nuevo arco (t, s) a la red, de capacidad infinita y costo $c_{ts} = -1$. Resolver el problema de flujo a costo mínimo, y minimizar $\sum_{ij} c_{ij} f_{ij}$ en esta red modificada es equivalente a maximizar el flujo f_{ts} del nuevo arco. Como el flujo del arco (t, s) debe retornar desde s a t a través de la red original, maximizar f_{ts} es lo mismo que resolver el problema de flujo máximo original.



3. Considere una red con nodos que van del 0 al 11, que corresponden a los puntajes obtenidos por el jugador. Los arcos de la red tienen costo igual a 1 y corresponden a una jugada factible, por lo que desde cada nodo i (excepto 1) salen dos arcos, uno que avanza dos nodos (2 puntos) y uno que avanza tres nodos (3 puntos). La red considerada se expone a continuación:



Se observa que la solución de la ruta más corta corresponde precisamente a las 4 jugadas que son el mínimo necesario para alcanzar los 11 puntos requeridos.

Bonus

Queremos encontrar la ruta mínima desde cualquier nodo i al nodo n, luego basta con comenzar el algoritmo desde n y revisar los arcos hacia atrás, de la misma forma que el algoritmo original, es decir:

Inicialización:

$V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $p_n = n$, $d_i = \infty$, $p_i = \infty$, $\forall i \neq n$

Mientras $V \neq f$

Escoger $i = argmin_{k \in V}\{d_k\}$

$\forall j : (j, i) \in A$

Si $d_i + c_{ji} < d_j \Rightarrow d_j = d_i + c_{ji}$, $p_j = i$, $V \setminus \{i\}$