INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Daniel Espinoza, Gonzalo Romero

Auxiliares: Víctor Bucarey, Nelson Devia,
Jocelyn González, Fernando Solari

IN3701 – Optimización
Auxiliar 4
16 de Abril de 2009

Problema 1

Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$
\begin{aligned}
\text{(p) max } & 2X_2 - X_1 \\
\text{s.a. } & 5X_2 - 3X_1 \leq 15 \\
& 4X_2 - X_1 \leq 20 \\
& 4X_2 + 7X_1 \leq 84 \\
& X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Resuelva utilizado Simplex Matricial comenzando en el origen. Indique en el gráfico lo que está sucediendo en cada iteración (Interpretando variables básicas y no básicas).

Problema 2

Sea, f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa, S ϵ R^n un conjunto convexo y x^* un elemento de S. Suponga que x^* es un óptimo local para el problema de minimización $f(x)$ en S; ie, Existe un $\varepsilon > 0$ tal que $f(x^*) \leq f(x)\ \forall\, x \in S$ que cumple $\| x - x^* \| \leq \varepsilon$. Pruebe que x^* es un óptimo global; esto es, $f(x^*) \leq f(x)\ \forall\, x \in S$.

Problema 3

Considere el problema de minimización c^t x en el poliedro P, pruebe lo siguiente:

a) Una solución factible x es óptima ssi c^t d ≥ 0, para toda dirección factible d en x.
b) Una solución factible x es la única solución óptima ssi c^t d > 0 para toda dirección factible d ≠ 0 en x.

Problema 4

Sea x una solución básica factible asociada con alguna matriz B, pruebe que:

a) Si el costo reducido de todas las variables no básicas es positivo, entonces x es la única solución óptima.
b) Si x es la única solución y es no degenerada, entonces el costo reducido de todas las variables no básicas es positivo.

Pauta Auxiliar 4
16 de Abril de 2009

Problema 1

Primero se lleva al problema a la forma estándar:

$$
\begin{aligned}
(P^*)\ \min \quad & -2X_2 + X_1 \\
\text{s.a.} \quad & 5X_2 - 3X_1 + X_3 = 15 \\
& 4X_2 - X_1 + X_4 = 20 \\
& 4X_2 + 7X_1 + X_5 = 4 \\
& X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Comenzamos del origen, por lo que las variables no básicas son X_1 y X_2. Las variables básicas son X_3, X_4 y X_5. Con lo anterior se tiene que:

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
R = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{R} = B^{-1} \cdot R = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}
$$

$$
b = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 84 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 84 \end{pmatrix}
$$

Vemos si el punto de partida es óptimo analizando los costos reducidos:

$$
\overline{c_R} = c_R - c_B \cdot \overline{R} = (1 \quad -2) - (0 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \quad \overline{c_R} = (1 \quad -2)
$$

$\Rightarrow$ No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos menores que cero.

Criterio de entrada a la base: Entra aquel con menores costos reducidos $\Rightarrow$ entra X_2.

Criterio de salida de la base: $\min\limits_{a_{is} \geq 0} \left\{ \dfrac{\overline{b_i}}{\overline{a_{is}}} \right\} = \min \left\{ \dfrac{15}{5} \quad \dfrac{20}{4} \quad \dfrac{84}{4} \right\} \Rightarrow$ sale X_3.

Esto implica que las nuevas variables no básicas son X_1 y X_3. Las variables básicas son X_2, X_4 y X_5. Con lo anterior se tiene que:

$$B=\begin{pmatrix}5&0&0\\4&1&0\\4&0&1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1}=\begin{pmatrix}1/5&0&0\\-4/5&1&0\\-4/5&0&1\end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}-3&1\\-1&0\\7&0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{R}=B^{-1}\cdot R=\begin{pmatrix}-3/5&1/5\\7/5&-4/5\\47/5&0\end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix}15\\20\\84\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{b}=B^{-1}\cdot b=\begin{pmatrix}3\\8\\81\end{pmatrix}$$

Vemos si el punto es óptimo analizando los costos reducidos:

$$\overline{c_R}=c_R-c_B\cdot\overline{R}=(1\quad 0)-(-2\quad 0\quad 0)\cdot\begin{pmatrix}-3/5&1/5\\7/5&-4/5\\47/5&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{c_R}=(-1/5\quad 2/5)$$

$\Rightarrow$ No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos menores que cero.

Criterio de entrada a la base: Entra aquel con menores costos reducidos $\Rightarrow$ entra X_1.

Criterio de salida de la base: $\min\limits_{a_{is}\geq 0}\left\{\dfrac{\overline{b_i}}{\overline{a_{is}}}\right\}=\min\left\{\dfrac{40}{7}\quad\dfrac{405}{47}\right\}\Rightarrow$ sale X_4.

Esto implica que las nuevas variables no básicas son X_4 y X_3. Las variables básicas son X_2, X_1 y X_5. Con lo anterior se tiene que:

$$B=\begin{pmatrix}5&-3&0\\4&-1&0\\4&7&1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1}=\begin{pmatrix}1/7&3/7&0\\-4/7&5/7&0\\32/7&-47/7&1\end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad \overline{R} = B^{-1} \cdot R = \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 5/7 & -4/7 \\ -47/7 & 32/7 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 84 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 45/7 \\ 40/7 \\ 128/7 \end{pmatrix}$$

Vemos si el punto es óptimo analizando los costos reducidos:

$$\overline{c_R} = c_R - c_B \cdot \overline{R} = (0 \quad 0) - (-2 \quad 1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 5/7 & -4/7 \\ -47/7 & 32/7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{c_R} = (1/7 \quad 2/7)$$

$\Rightarrow$ Estamos en el óptimo.

Este es: $X_1 = 40/7$, $X_2 = 45/7$ y el valor de la función objetivo es $z = 50/7$

Lo importante a indicar gráficamente es que comienzan en el punto (0,0), se mueven al (0,3) y luego terminan en el (40/7,45/7). Estos valores los determinan las variables básicas y no básicas. Cuando una variable artificial sale de la base, quiere decir que se hace cero, y por tanto la restricción asociada a esa variable básica es activa y nos encontramos en el punto donde lo es.

Problema 2

$\forall b \in S, \ \exists$ a tal que $\| a - x^* \| \leq \varepsilon$

y $\exists \lambda$ tq $a = \lambda x^* + (1-\lambda) b$ → S convexo

$f(x^*) \leq f(a)$ → x* es óptimo local

$f(a) \leq \lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(b)$ → f es convexo

$\rightarrow f(x^*) \leq \lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(b)$

$\rightarrow f(x^*)(1-\lambda) \leq (1-\lambda) f(b)$

$\rightarrow f(x^*) \leq f(b)$ → x* es óptimo global

Problemas 3 y 4 propuestos, se resolverán en la próxima auxiliar.