Geometría y Polihedros

Dpto. Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

IN3701, Optimización

30 de marzo de 2009

Contenidos

Definición 2.1

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ es un poliedro si $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ para algún $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Definición 2.2

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado si existe $k \in \mathbb{R}_+$ tal que $\forall x \in S, \quad \|x\| \leq k$.

Definición 2.3

Dado $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, decimos que:

1. $S := \{x \in \mathbb{R}^n : ax = b\}$ es un hiperplano.
2. $S := \{x \in \mathbb{R}^n : ax \leq b\}$ es un semi-espacio.

- Note que un hiperplano es la frontera de un semi-espacio.
- Si a define un hiperplano S, a es ortogonal a S.
- Un poliedro es la intersección finita de semi-espacios.

Definición 2.4

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si $\forall x, y \in S, \lambda \in [0,1]$ se tiene que $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$.

- Equivalentemente, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, si $\forall \{x_j\}_{j=1}^k \subseteq S$ y $\{\lambda_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}_+$ tal que $\sum(\lambda_i : i = 1, \ldots, k) = 1$ se tiene que $y = \sum(x_i\lambda_i : i = 1, \ldots, k) \in S$.
- y se dice una combinación convexa de $\{x_i\}_{i=1}^k$.

Definición 2.5

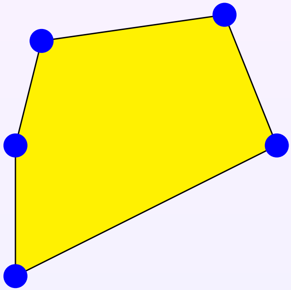
Dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos la envoltura convexa de S como $\mathrm{conv\_hull}(S) := \{y \in \mathbb{R}^n : \exists k \in \mathbb{N}, \{x_i\}_{i=1}^k \subseteq S, \{\lambda_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^+, \sum(\lambda_i : i = 1, \ldots, k) = 1$ tal que $y = \sum(\lambda_i x_i : i = 1, \ldots, k)$.

- $\mathrm{conv\_hull}(S)$ es el conjunto convexo minimal que contiene S.
- $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si y sólo si $S = \mathrm{conv\_hull}(S)$.

Teorema 2.1

- La intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.
- Todo poliedro es un conjunto convexo.
- Combinaciones convexas finitas de un conjunto convexo esta en el conjunto.
- La envoltura convexa de un conjunto es un conjunto convexo.

- Consideremos un poliedro P y el problema $\max\{cx : x \in P\}$.
- ¿Son todos los puntos factibles igual de importantes?
- ¿O hay algunos mas importantes que otros?
- ¿Cómo podemos caracterizarlos en general?



De vertices, bases y puntos extremos

Definición 2.6

Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. $x \in P$ es un punto extremo de P si $\nexists y, z \in P \setminus \{x\} : x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$. (i.e. x no es combinación convexa de puntos en P).

Definición 2.7

Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. x es un vertice de P si existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $cx > cy, \quad \forall y \in P \setminus \{x\}$.

- ¿Qué relación hay entre puntos extremos y vertices de P?
- ¿Cómo identificamos puntos extremos/vertices en forma algebraica o algoritmica.

De vertices, bases y puntos extremos

- Para Fijar ideas consideramos un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : a^i x \leq b_i, \quad i \in I\}$ (i.e. $|I| \in \mathbb{N}$).

Definición 2.8

Dado P como antes, y $x^* \in \mathbb{R}^n$ definimos $I(x^*) = \{i \in I : a^i x^* = b_i\}$. $I(x)$ se llama conjunto de restricciones activas para x en P. Nóte que este concepto depende de la representación particular de P.

Teorema 2.2

Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro como antes, y $x^* \in P$ and $I^* = I(x^*)$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existen n vectores linealmente independientes en $\{a^i : i \in I^*\}$.
2. $\mathbb{R}^n = \langle\{a^i : i \in I^*\}\rangle$ (espacio lineal generado).
3. El sistema de ecuaciones $a^i x = b_i : i \in I^*$ tiene solución única.

De vertices, bases y puntos extremos

Definición 2.9

Sea P un poliedro y $x^* \in \mathbb{R}^n$, entonces

1. x^* es una solución básica si hay n restricciones activas l.i.
2. x^* es una solución básica factible si además satisface todas las demás restricciones definiendo P.

Teorema 2.3

Sea P un poliedro no vacío y $x^* \in P$, entonces es equivalente:

1. x^* es un vertice de P.
2. x^* es un punto extremo.
3. x^* es una solución básica factible.

- Hint: Demostrar 1 $\Rightarrow$ 2, !3 $\Rightarrow$!2, 3 $\Rightarrow$ 1 con $c = \sum a^i : i \in I(x)$,
- Permite tener una definición *algorítmica* de los vertices de P.
- Los vertices de P son finitos (puede ser exponencial en n).

Polihedros en forma estándar

Definición 2.10

Se dice que un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ esta en forma estandard si $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ y $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathrm{rank}(A) = m$.

- implica que las restricciones son l.i., y que $n \geq m$.

Teorema 2.4

Todo poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es la imagen (lineal) de un poliedro $P' \subseteq \mathbb{R}_+^{n'}$ en forma estandar para algún $n' \geq n$.

Teorema 2.5

Sea $P := \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax = b\}$ en forma estándar y $x \in \mathbb{R}^n$. x es una solución básica si y sólo si $Ax = b$ y existe $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tal que

1. $\|B\| = m$.
2. Los vectores $\{A_{\cdot,i}\}_{i \in B} := A_B$ son l.i.
3. $x_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \setminus B$.

Polihedros en forma estándar

- Dada una base B, decimos que $x_i : i \in B$ son variables básicas.
- Las variables x_i con $i \in N := \{1, \ldots, n\} \setminus B$ se dicen no básicas.
- Nóte que las columnas $\{A_i\}_{i \in B}$ son una base de $\mathbb{R}^m$.
- Dada una base B, la solución básica asociada es $(x_B, x_N) := (B^{-1}b, 0)$.
- Si $x_B \geq 0$ entones B es una base factible.
- Nóte que una solución basica puede estar asociada a múltiples bases, ejemplo?
- Dos bases B_1, B_2 se dicen adyacentes si $|B_1 \Delta B_2| = 2$.
- ¿Qué tan restrictivo es asumir que A es de rango completo?
  - En teoría basta eliminar restricciones redundantes.
  - Basta transformar el problema $\min\{cx : Ax = b, x \in \mathbb{R}^n_+\}$ al problema $\min\left\{cx + \infty y : (A|I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}_+\right\}$.

Degenerancia

Definición 2.11

Una solución básica $x \in \mathbb{R}^n$ es degenerada si $|I(x)| > n$.

Definición 2.12

Dado un poliedro en forma estándar $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y x una solución básica, x es degenerada si tiene mas de $n - m$ componentes con valor cero.

- Si los poliedros a estudiar fueran *aleatoreos*, degenerancia no debería ser común.
- En problemas prácticos, la degenerancia es común, debido a la estructura.
- Degenerancia depende de la representación usada para el problema.

¿Cuándo existen puntos extremos?

Definición 2.13

Un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ contiene una línea si existe $x \in P$ y una dirección $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $x + \lambda d \in P, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.6

Dado $P := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x \geq b_i, \quad \imath = 1, \ldots, m\} \neq \emptyset$, entonces es equivalente:

1. P posee al menos un punto extremo.
2. P no contiene una línea.
3. existe $B \subseteq \{i, \ldots, m\}$ tal que $\{a_i : i \in B\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Corolario 2.1

Todo poliedro acotado y todo poliedro en forma estándar posee al menos un punto extremo.

Optimalidad de puntos extremos

Teorema 2.7

Consideremos el problema de $\max\{cx : x \in P\}$, y asuma que P posee al menos un punto extremo y el problema admite solución óptima, entonces existe una solución óptima que es punto extremo.

Corolario 2.2

Consideremos el problema de $\max\{cx : x \in P\}$, y asuma que P posee al menos un punto extremo, entonces existe una solución óptima que es punto extremo, o el problema es no-acotado.

Corolario 2.3

Consideremos el problema de $\max\{cx : x \in P\}$, y asuma que $P \neq \emptyset$, entonces existe una solución óptima, o el problema es no-acotado.

Representación de poliedros

Teorema 2.8

Sea P un poliedro acotado, y $V \subseteq P$ el conjunto de vertices de P, entonces $P = \text{conv\_hull}(V)$.

Definición 2.14

Dado un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos la dimensión de P $(\dim(P))$ como la dimensión del menor espacio lineal afín que lo contiene.

Observación 2.1

Nóte que $\dim(P) = k$ implica que existe $x_o \in P$ y $\{x_i\}_{i=1}^k \subsetneq \mathbb{R}^n$ tales que

$$P \subseteq S := \left\{ x_o + \sum_{i=1}^{k} x_i \lambda_i : \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Representación de poliedros

- Para demostrar el teorema, use inducción en $\dim(P)$ (caso $\dim(P) = 0$ es trivial, ¿Por qué?).
- Consideremos poliedro P de dimensión k.
- $P \subseteq S := \left\{ x_o + \sum_{i=1}^{k} x_i \lambda_i : \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$.
- tome $y \in P$, si y es vertice el resultado es trivial, si no, sea v punto extremo de P y considere la linea $u = v + \lambda(y - v)$.
- Sea la restricción $a_o x \leq b_o$ por donde la semilínea sale de P.
- Defina $Q = \{x \in P : a_o x = b_o\}$, y u^* tal que $a_o u^* = b_o$ y $u^* = v + \lambda^*(y - v)$.
- La hipotesis de inducción aplica a Q ¿Por qué?
- Obtenemos el resultado.