

IN3701 – Optimización
Guía 2

I. SIMPLEX

1. Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 1, x \geq 0\}$ y considere el vector $x = (0,0,1)$. Encuentre el conjunto de direcciones factibles en x .

2. Considere el problema de minimizar $c'x$ sobre el conjunto

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, Dx \leq f, Ex \leq g\}.$$

Sea x^* un elemento de P que satisface $Dx^* = f$ y $Ex^* < g$. Muestre que el conjunto de direcciones factibles en x^* es el conjunto $\{d \in \mathbb{R}^n / Ad = 0, Dd \leq 0\}$.

3. Considere el problema de minimizar $c'x$ sobre el conjunto

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, Dx \leq f, Ex \leq g\}$$

Sea x^* un elemento de P que satisface $Dx^* = f$, $Ex^* < g$. Muestre que el conjunto de direcciones factibles en el punto x^* es el conjunto:

$$Q = \{d \in \mathbb{R}^n / Ad = 0, Dd \leq 0\}$$

4. Responder las siguientes preguntas:

- ¿Cómo determina el algoritmo Simplex si el vértice actual es una solución óptima del problema?
- Si el vértice actual es óptimo, ¿Cómo se puede determinar a través del algoritmo si hay más de un óptimo?
- ¿Cómo determina el algoritmo Simplex si el problema es no acotado?
- Explique cómo el algoritmo Simplex asegura no salirse del espacio de soluciones factibles al efectuar una iteración.
- Señale si el algoritmo Simplex asegura en cada iteración la máxima variación posible de la función objetivo. ¿Por qué? Si no lo asegura, explique cómo se podría lograr la máxima variación.
- ¿Puede suceder que en un PL de minimización exista algún costo reducido negativo, pero que en esa iteración del Simplex la función objetivo no pueda ser mejorada?

5. Explique cada uno de los siguientes casos especiales de Simplex y señale en qué parte del algoritmo verifica el caso:
- a) Soluciones Múltiples
 - b) Solución Degenerada
 - c) Solución Infactible
 - d) Sin Solución

II. DUALIDAD

1. Considere el problema primal:

$$\text{Min } c'x$$

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

Formule el problema dual y conviértalo en un problema equivalente de minimización. Encuentre un conjunto de condiciones sobre la matriz A y los vectores b y c, bajo las cuales el problema dual es idéntico al primal, y construya un ejemplo en el cual se satisfagan estas condiciones.

2. Una florista sabe hacer solo 2 tipos distintos de arreglos florales (x_1 y x_2) para los cuales dispone de 3 tipos distintos de flores: rozas, tulipanes e ibizcos. Los requerimientos de flores para cada arreglo, la disponibilidad de flores y los precios de cada arreglo vienen dados por:

FLORES	X_1	X_2	DISPONIBILIDAD
Rozas	3	1	300
Tulipanes	1	1	140
Ibizcos	1	3	300
PRECIO	2000	1000	

- a) Formule un PPL que resuelva el problema de maximización de ingresos por ventas sujeto a la disponibilidad de recursos.
- b) ¿Cuál es el problema dual asociado? ¿Qué situación podría estar optimizando?
- c) Usando el teorema de holgura complementaria, encuentre el óptimo del problema dual sabiendo que el óptimo primal viene dado por ($x_1 = 80$, $x_2 = 60$).
- d) Suponga que retorna frustrado después que una bella dama le cerrara la puerta cuando usted le llevaba amablemente una rosa, un tulipán y un ibizco 6. Si se encuentra con la florista, ¿Cuanto cree que estaría dispuesta a pagar ella por sus flores?

3. Sea $P = \{x \in R^n / Ax = b, x \geq 0\}$ un poliedro no vacío y sea m la dimensión del vector b . Llamaremos a x_j una variable nula si $x_j = 0$ para todo $x \in P$
 - a) Suponga que existe algún $p \in R^m$ tal que $p^t A \geq 0, p^t b = 0$ tal que la j -ésima componente de $p^t A$ es positiva. Pruebe que x_j es una variable nula.
 - b) Pruebe la recíproca de (a): si x_j es una variable nula, entonces existe algún $p \in R^m$ con las propiedades mencionadas en (a).
 - c) Si x_j no es una variable nula, entonces por definición existe algún $y \in P$ para el cual $y_j > 0$. Use las partes (a) y (b) para probar que existe $x \in P$ y $p \in R^m$ tales que: $p^t A \geq 0, p^t b = 0, x + A^t p > 0$
4. Sea A una matriz dada. Muestre que exactamente una de las siguientes alternativas debe cumplirse.
 - a) Existe algún $x \neq 0$ tal que $Ax = 0, x \geq 0$.
 - b) Existe algún p tal que $p^t A > 0$.
5. Sea A una matriz dada. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - a) Todo vector x tal que $Ax \geq 0$ y $x \geq 0$ debe satisfacer $x_1 = 0$.
 - b) Existe algún p tal que $p^t A \leq 0, p \geq 0$ y $p^t A_1 < 0$, donde A_1 es la primera columna de A .
6. Sea a y $a_1, \dots, a_m$ vectores dados en R^n . Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - a) Para todo $x \geq 0$, se tiene que $a^t x \leq \max_i a_i^t x$.
 - b) Existen coeficientes λ_i no negativos y que suman 1, tales que $a \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$.
7. Considere un problema de programación lineal en forma estándar y asuma que las filas de A son linealmente independientes. Para cada una de las siguientes afirmaciones dé una prueba o un contraejemplo.
 - a) Sea x^* una solución básica factible. Suponga que para cada base correspondiente a x^* , la solución básica asociada de el dual es infactible. Luego, el costo óptimo debe ser menor estricto de $c^t x^*$.
 - b) El dual del problema auxiliar primal considerado en fase 1 del método simplex es siempre factible.
 - c) Sea y_i la variable dual asociada a la i -ésima restricción en el primal. Eliminar la i -ésima restricción en el primal es equivalente a introducir la restricción $y_i = 0$ en el dual.
 - d) Si el criterio de no-acotamiento de en la aplicación del método simplex en el problema primal es satisfecho, entonces el problema dual es infactible.

8. Considere el problema de programación lineal de minimizar $c'x$ sujeto a $Ax=b$, $x \geq 0$. Sea x^* la solución óptima, asuma que existe, y sea p^* la solución del problema dual.

- Sea x'' una solución óptima del primal, cuando c es reemplazado por algún c'' . Muestre que $(c'' - c)'(x'' - x^*) \leq 0$.
- Sea el vector de costo fijo e igual a c , pero suponga que ahora cambiamos b por b'' , y sea x la correspondiente solución del primal. Muestre que $(p^*)'(b'' - b) \leq c'(x'' - x^*)$.
- Dé un ejemplo de un par de problemas lineales (dual y primal), en los cuales ambos tienen múltiples soluciones óptimas.
- Considere un problema de programación lineal en forma estándar que es infactible, pero que se transforma en factible y tiene un costo finito cuando la última desigualdad es omitida. Muestre que el óptimo del dual es factible y tiene costo óptimo finito.

9. Considere el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \min \quad cx \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

y su dual.

- Pruebe que si un problema tiene una solución no degenerada y única, lo mismo ocurre con el otro.
- Suponga que tiene una base óptima no degenerada para el problema primal y que uno de los costos reducidos para las variables básicas es cero.