Dualidad

Dpto. Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

IN3701, Optimización

22 de abril de 2009

Contenidos

Motivación

- Consideramos

$$(P): \quad \max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

- Buscamos una forma de acotar z_P por arriba.
- Ejemplo:

$$(P): \quad \max\left\{7x_1 + 9x_2 : \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, x \geq 0\right\}$$

- Sumando ambas restricciones del ejemplo obtenemos $8x_1 + 10x_2 \leq 5$.
- Con esto podemos concluir $z_P \leq 5$.
- ¿Cómo podemos hacer esto en general?
- ¿Qué tan buenas son las cotas encontradas de esta manera?

Motivación

- Consideramos

$$(P): \quad \max\left\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\right\}$$

- En general buscamos $y \in \mathbb{R}^m_+$ tal que $\sum_{i=1}^{m} y_i a i \geq c$
- Note que $y^t b$ es una cota superior para z_P.
- De donde podemos definir el problema de optimización:

$$(D): \quad \min\left\{yb^t : A^t y \geq c^t, y \geq 0\right\}$$

- (D) es el problema dual de (P), y (P) se dice problema primal.

Teorema 2.1

(Dualidad Débil) para cualquier problema (P) y su dual (D) se tiene que $z_P \leq z_D$.

Observación 2.1

El dual del dual es equivalente al problema primal.

Problema Dual en forma estándar

- Consideremos (P) en forma estándar:
  $(P): \quad \min\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$.
- (P) es equivalente a
  $(P'): \quad \max\{-cx : Ax \leq b, -Ax \leq -b, x \geq 0\}$.
- El dual de (P') (D') sería

$$(D'): \quad \min\left\{y_+b^t - y_-b^t : A^ty_+ - A^ty_- \geq -c^t, y_+, y_- \geq 0\right\}$$

- Note que (D') es equivalente a

$$(D): \quad \max\left\{yb^t : A^ty \leq c^t\right\}$$

- (D) se llama el dual de (P), y por construcción tenemos $z_D \leq z_P$.

Equivalencia de Duales

Teorema 3.1

Suponga que tenemos un Problema lineal factible (P), y lo hemos transformado en un problema lineal (P') por una secuencia de operaciones del tipo:

- Reemplazar una variable libre con la diferencia de dos variables no-negativas.
- Reemplazar una desigualdad por una igualdad con una variable de holgura positiva.
- Eliminar restricciones de igualdad linealmente dependientes.

Entonces los duales (D) de (P) y (D') de (P') son equivalentes, es decir, o ambos son infactibles, o ambos tienen el mismo valor óptimo.

Teorema de Dualidad

- Recordemos que para (P) en forma estándar, y (D) su dual, tenemos $z_D \leq z_P$.

Corolario 3.1

- Si $z_P = -\infty$ entonces (D) es infactible.
- Si $z_D = \infty$ entonces (P) es infactible.

- Puede ser que $z_P > z_D$?

Teorema 3.2

(Dualidad Fuerte 1947-1951) Si P tiene solución óptima, entonces $z_P = z_D$.

- Ind: use algoritmo de simplex y defina $y^t = c_B A_B^{-1}$.
- Note que (P) no acotado $\Rightarrow$ (D) infactible, y que (P) con solución óptima $\Rightarrow$ (D) solución óptima, ¿Qué pasa si (P) es infactible?
  - Existen pares duales/primales infactibles.

Holgura Complementaria

Teorema 3.3

Considerando $(P): \quad \max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$ y su dual $(D): \quad \min\left\{yb^t : A^t y \geq c^t, y \geq 0\right\}$, asumiendo que ambos son factibles, y que x^* es una solución factible de (P) y y^* es una solución factible de (D).
Entonces $(Ax^* - b)_i y_i^* = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$ y $(A^t y - c^t)_i x_i^* = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ si y sólo si x^* es óptimo primal y y^* es óptimo dual.

- Ind: Use dualidad fuerte y débil, y la factibilidad de x^* y y^*.

Interpretación económica de las variables duales

- Consideremos (P) en forma estándar, y sea x^* una solución óptima básica no degenerada.
  - Recordemos que $y^* = (c_B A_B^{-1})^t$ es la solución óptima al problema dual y que $cx^* = b^t y^*$.
  - ¿Qué ocurre si perturbamos b a un valor $b + d$ con d tal que $A_B^{-1}(b + d) \geq 0$?
  - B sigue siendo una base óptima.
  - El valor óptimo del problema perturbado es $c_B A_B^{-1}(b + d) = (b + d)^t y^*$.
  - y_i^* representa el cambio en la función objetivo por unidad del recurso b_i que cambiamos.
  - y_i^* se llama precio sombra de la restricción $i \in \{1, \ldots, m\}$.
  - Note que, por holgura complementaria, sólo restricciones activas en el óptimo pueden tener precios sombras no-negativos.
- ¿Qué sucede si x^* es solución óptima básica degenerada?
  - Podríamos considerar todas las bases óptimas y usar un promedio de los duales resultantes.

Lema de Farkas

- Un problema relacionado (y anterior) a optimización es, dado un poliedro, determinar si es factible.
- La forma más sencilla del problema puede escribirse como ¿Cuándo $P := \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ tiene solución factible?

Teorema 3.4

(Lema de Farkas 1896) Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Entonces exactamente una de las dos proposiciones es cierta:

1. Existe $x \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $Ax = b$.
2. Existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y^t A \geq 0$ y $y^t b < 0$.

- ¿Cuál es la interpretación geométrica de este resultado?
- Esto es un caso particular del teorema de separación de conjuntos convexos.

Conos

Definición 3.1

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cono si $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, x \in C$ se tiene que $\lambda x \in C$.

Definición 3.2

Un cono $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice poliedral si existe $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ac \geq 0\}$.

Teorema 3.5

Sea C un cono poliedral en $\mathbb{R}^n$ definido por $a_i x \geq 0 : i = 1, \ldots, m$. Entonces, las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. 0 es un punto extremo de C.
2. C no contiene una línea.
3. Existe $B = \{i_1, \ldots, i_n\} \subset \{1, \ldots, m\}$ tal que $\{a_i\}_{i \in B}$ es un conjunto l.i.

Rayos y Rayos Extremos

Definición 3.3

Dado $P = \{x : Ax \geq b\}$, y $\overline{x} \in P$, definimos el cono de recesión de P en x como $P_o(\overline{x}) := \{d \in \mathbb{R}^n : A(\overline{x} + \lambda d) \geq b, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+\}$.

- Note que $P_o(\overline{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad \geq 0\}$.

Definición 3.4

Dado C un cono poliedral, y $x \in C \setminus \{0\}$. x se dice rayo extremo si hay $n-1$ restricciones activas l.i. en x. Si C es el cono de recesión de P, x se dice rayo extremo de P.

Teorema 3.6

Consideremos $(P) : \min\{cx : Ax \geq 0\}$. El problema es no acotado si y sólo si existe un rayo extremo d con $cd < 0$.

- Ind: Considere $P' := \{x : Ax \geq 0, cx \geq -1\}$.

Rayos extremos y problemas no acotados

Teorema 3.7

Consideremos el problema $(P) : \min\{cx : Ax \geq b\}$ y asuma que $\{x : Ax \geq b\}$ posee al menos un punto extremo.
Entonces (P) es no acotado si y sólo si existe un rayo extremo d de P que satisface $cd < 0$.

- Considere el problema dual de (P), modifique la función objetivo por la función nula y tome el dual de problema resultante.
- Para concluir aplique el teorema anterior.
- Note que el conjunto de rayos extremos de un poliedro es finito.

Teorema 3.8

Sea $P = \{x : Ax \geq b\}$ un poliedro no vacío con al menos un punto extremo.
Sea $V := \{x^i\}_{i=1}^{v}$ el conjunto de todos los puntos extremos de P.
Sea $R := \{w^i\}_{i=1}^{r}$ el conjunto de todos los rayos extremos de P.
Definimos

$$Q := \left\{ \sum_{i=1}^{v} x^i \lambda_i + \sum_{i=1}^{r} w^i \mu_i : \lambda, \mu \geq 0, \sum_{i=1}^{v} \lambda_i = 1 \right\}$$

Entonces $Q = P$.

- Claramente $Q \subseteq P$ (¿Por qué?).
- Suponga que esta contenidos estrictamente.
- Busque hiperplano p separando punto en P no contenido en Q.
- Minimice p en P y concluya.

Conjuntos generados finitamente

Definición 3.5

Dados $V = \{x^i\}_{i=1}^v, R = \{w^i\}_{i=1}^r \subset \mathbb{R}^n$, se dice que

$$Q := \left\{ \sum_{i=1}^{v} x^i \lambda_i + \sum_{i=1}^{r} w^i \mu_i : \lambda, \mu \geq 0, \sum_{i=1}^{v} \lambda_i = 1 \right\}$$

es finitamente generado

Corolario 3.2

Todo poliedro es finitamente generado

Teorema 3.9

Todo conjunto finitamente generado es un poliedro

- Ind: Considere maximizar 0 sobre Q y su dual para caracterizar $x \in Q$.