

Introducción

Dpto. Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

IN3701, Optimización

11 de marzo de 2009

Contenidos

- 1 Por que optimización?
- 2 Algunas notas históricas
- 3 Algunos Problemas de Optimización

De que se trata?

Definición: (Wikipedia)

In mathematics, the simplest case of optimization, or mathematical programming, refers to the study of problems in which one seeks to **minimize** or **maximize** a **real function** by systematically choosing the values of real or integer variables from within an **allowed set**. This (a scalar real valued objective function) is actually a small subset of this field which comprises a large area of applied mathematics and generalizes to study of means to obtain “best available” values of some objective function given a defined domain where the elaboration is on the types of functions and the conditions and nature of the objects in the problem domain.

Y que tiene que ver con Ingeniería?

- Ingeniería busca la eficiencia en el uso de recursos usualmente escasos.
- Por que es importante el uso eficiente?
 - Mundo competitivo (privado y público).
- Campos de aplicación?
 - Planificación del calendario de la ANFP.
 - Embotellado y etiquetado de vinos.
 - Planificación de corte y recolección de forestales.
 - Producción minera de corto y largo plazo.
 - Adjudicación de proveedores en JUNAEB.
 - Planificación producción electricidad.
 - Segmentación de clientes.
- Forma de un problema de optimización:

$$\min\{f(x) : x \in A\}$$

Y cual es la dificultad?

- En la práctica:
 - A es acotado.
 - Datos originales tienen errores.
 - La implementación no puede ser siempre exacta.
 - Nos bastan buenas soluciones.

Algoritmo universal de optimización

Dado P : $\min\{f(x) : x \in A\}$.

- Escoger $\varepsilon > 0$:
 - Discretizar A en subconjuntos de tamaño ε tal que $A = \bigcup_{i=1,\dots,n} A_i$.
 - por cada $i = 1, \dots, n$ escoger $x_i \in A_i$, evaluar $f(x_i)$ y quedarse con el mejor.
-
- El problema?
 - Queremos la solución ahora!

Comparando Velocidades

- Supongamos que disponemos de un PC de 1MHz,
¿ qué tamaño de problemas podemos resolver en el tiempo?

instr.	sec.	min.	hora	día	mes	año	siglo
$\log_2(n)$	2^{10^6}	$2^{10^{7,77}}$	$2^{10^{9,55}}$	$2^{10^{10,93}}$	$2^{10^{12,42}}$	$2^{10^{13,49}}$	$2^{10^{15,49}}$
$\sqrt{n}$	$2^{10^{1,6}}$	$10^{15,55}$	$10^{19,11}$	$10^{21,87}$	$10^{24,84}$	$10^{26,99}$	$10^{30,99}$
n	10^6	$10^{7,77}$	$10^{9,55}$	$10^{10,93}$	$10^{12,42}$	$10^{13,49}$	$10^{15,49}$
$n \log_2(n)$	$10^{4,79}$	$10^{6,44}$	$10^{8,12}$	$10^{9,44}$	$10^{10,86}$	$10^{11,90}$	$10^{13,83}$
n^2	1000	$10^{3,88}$	$10^{4,77}$	$10^{5,46}$	$10^{6,21}$	$10^{6,74}$	$10^{7,74}$
n^3	100	391	1532	4420	$10^{4,14}$	$10^{4,49}$	$10^{5,16}$
2^n	19	25	31	36	41	44	51
$n!$	9	11	12	13	15	16	17

Principales áreas de la optimización: (Wikipedia)

- Linear programming: studies the case in which the objective function f is linear and the set A is specified using only linear equalities and inequalities. Such a set is called a polyhedron or a polytope if it is bounded.
- Integer programming: studies linear programs in which some or all variables are constrained to take on integer values.
- Quadratic programming: allows the objective function to have quadratic terms, while the set A must be specified with linear equalities and inequalities.
- Nonlinear programming: studies the general case in which the objective function and/or the constraints contain nonlinear parts.
- Convex programming studies the case when the objective function is convex and the constraints, if any, form a convex set. This can be viewed as a particular case of nonlinear programming or as generalization of linear or convex quadratic programming.

Principales áreas de la optimización: (Wikipedia)

- Second order cone programming (SOCP).
- Semidefinite programming (SDP) is a subfield of convex optimization where the underlying variables are semidefinite matrices. It is generalization of linear and convex quadratic programming.
- Stochastic programming studies the case in which some of the constraints or parameters depend on random variables.
- Robust programming is, as stochastic programming, an attempt to capture uncertainty in the data underlying the optimization problem. This is not done through the use of random variables, but instead, the problem is solved taking into account inaccuracies in the input data.
- Combinatorial optimization is concerned with problems where the set of feasible solutions is discrete or can be reduced to a discrete one.

Principales áreas de la optimización: (Wikipedia)

- Infinite-dimensional optimization studies the case when the set of feasible solutions is a subset of an infinite-dimensional space, such as a space of functions.
- Heuristic algorithms and Metaheuristics.
- Constraint satisfaction studies the case in which the objective function f is constant (this is used in artificial intelligence, particularly in automated reasoning).
- Disjunctive programming used where at least one constraint must be satisfied but not all. Of particular use in scheduling.
- Trajectory optimization is the speciality of optimizing trajectories for air and space vehicles. In a number of subfields, the techniques are designed primarily for optimization in dynamic contexts (that is, decision making over time)
- Calculus of variations seeks to optimize an objective defined over many points in time, by considering how the objective function changes if there is a small change in the choice path.

Principales áreas de la optimización: (Wikipedia)

- Optimal control theory is a generalization of the calculus of variations.
- Dynamic programming studies the case in which the optimization strategy is based on splitting the problem into smaller subproblems. The equation that relates these subproblems is called the Bellman equation.
- Mathematical programming with equilibrium constraints is where the constraints include variational inequalities or complementarities.

En que nos concentraremos?

- Formulación de problemas lineal enteros.
- Programación lineal entera.
- Problemas de flujo.
- Optimización convexa.
- Algunas extensiones.
- Por que?
 - Eficiencia computacional.
 - Impacto desde el punto de vista de la ingeniería.

Algo de Historia y contexto:



- El interés por desigualdades nace de la mecánica (multiplicadores de Lagrange, 1788).
- Fourier (1820) por primera vez ve la relación entre geometría, álgebra y optimización.
- Primer esquema de optimización es el **steepest descent** de Carl Friedrich Gauss (1777-1855).
- Kantorovich (1939) desarrolla la teoría básica de problemas de optimización lineal.
- W. Karush (1939) publica las condiciones de optimalidad para optimización convexa (condiciones KKT).

Algo de Historia y contexto:



- John Von Neumann (1947) publica una form del teorema de dualidad fuerte.
- Simplex es introducido por George Dantzig en 1947, primer algoritmo práctico para programación lineal.
 - El término **Programación Lineal** no viene de la computación. Dantzig estaba trabajando con el ejército de USA para definir posibles movimientos logísticos y de entrenamiento (reclutas), donde este tipo de soluciones se llamaban **programas**.
- Ralph E. Gomory (1958) propone el primer método para problemas lineales enteros.

Y hoy en día?

- Problemas de optimización lineal de varios millones de variables se resuelven en menos de una hora.
- Problemas de flujo de decenas de millones de variables se resuelven en minutos.
- Hay problemas enteros con cientos de miles de variables se resuelven en algunas horas.
- Hay problemas enteros con decenas de variables que no han podido resolverse.
- Optimización es una herramienta utilizada habitualmente en industrias como la aérea, retail, logística y otras.
- Amplio espacio en aplicar estas herramientas en industrias/sectores mas conservadores.
- Mucha teoría y practica por desarrollar.

Diseño de Embalajes

Una empresa exportadora debe enviar cada mes cierta cantidad del producto que se desarrolla a sus clientes en el exterior. El producto es embalado en cajas rectangulares, donde x corresponde al largo, y al ancho y w a la altura de la caja. Se quiere determinar la dimensión de las cajas que minimice el costo de armado de las mismas.

Supongamos que se dispone de hasta $60m^2$ del material necesario para armar el fondo, la cara frontal y la cara posterior de todas las cajas. El material de las otras 2 caras y la tapa deben comprarse a un costo de \$5 el metro cuadrado. Por otro lado, existe un costo de transporte de \$3 por caja. El volumen del producto que se quiere transportar es V .

Problema de la dieta óptima

Diversos estudios han llegado a la conclusión que para un desarrollo adecuado de una persona, ésta debiera consumir una serie de elementos al día. Se conoce el valor nutricional de una serie de comidas básicas comunes a la población. Por ende los servicios de asistencia social están interesados en buscar una la forma más barata de proveer estos elementos usando elementos de la dieta habitual en la población.

Problema de la Mochila

Se tienen n tipos diferentes de objetos, cada uno de ellos tiene un peso w_j y un beneficio v_j . Se dispone de una mochila que soporta un peso máximo W , donde estos objetos deben ser colocados, de manera de maximizar el valor total del contenido de la mochila, sin exceder la capacidad de ésta.

Los objetos son indivisibles, por lo que solo se pueden colocar en la mochila cantidades enteras de un tipo de objeto.