INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Guillermo Durán, Richard Weber

Auxiliares: Fernanda Bravo. André Carboni, Rodrigo Wolf

IN34A – Optimización
Auxiliar Extra Examen
7 de Julio, 2009

Problema 1 – Compilado examenes

1. Explique si puede o no tener utilidad ocupar el concepto de dualidad para resolver cada uno de los problemas lineales continuos que se van definiendo en el algoritmo de ramificación y acotamiento (Branch and Bound).
2. Explique qué es un algoritmo exacto y qué es una heurística para resolver un determinado problema. ¿En qué casos se debería usar cada uno? Relacione esta respuesta con lo estudiado sobre teoría de la complejidad computacional.
3. Suponga que usted está desarrollando un sitio web similar al de MapCity, donde el usuario puede ingresar el nombre de una calle origen y el nombre de una calle destino, y el sitio automáticamente muestra una ruta que une ambos puntos. ¿Cuál de los algoritmos vistos en el curso utilizaría usted para programar dicha función? Explique.
4. Dado un problema de programación dinámica, explique el significado de las variables de decisión, de las variables exógenas (parámetros) y de las variables de estado.

Pregunta 2 – CTP 4, 2008/2

La pequeña aerolínea nacional BRAVISSIMO ha sobrevivido durante años la intensa competencia en el mercado nacional. Se sabe que las grandes aerolíneas del país han invertido, desde hace ya varios años, en cómo gestionar sus capacidades de manera eficiente, de forma de maximizar los beneficios, y hoy cuentan con modelos que les permiten ofrecer *'cada asiento al precio adecuado, al cliente correcto y en el momento indicado'.*

Dada la crisis económica mundial que se enfrenta hoy día, quien realice sus actividades de forma eficiente tiene mayores posibilidades de sobrevivir. Por lo anterior, BRAVISSIMO desea indagar en los modelos que permiten gestionar la capacidad de manera eficiente, para así obtener un mayor beneficio y poder subsistir.

La compañía lo ha contratado a usted para que le entregue una evaluación simplificada de cómo debería realizar la tarificación de los asientos disponibles, en cada periodo, antes que el vuelo se realice.

La venta de los asientos comienza 3 meses antes de la salida del vuelo, y los aviones disponibles tienen capacidad fija de 50 asientos, los que son indistinguibles entre sí (esto es, no existe diferencia entre clases). Por otro lado, el precio se debe fijar en cada período, existiendo 3 niveles posibles: Alto (M$ 1000), medio (M$ 650) y bajo (M$ 500).
La demanda para cada mes, según el precio, se presentan a continuación:

Demanda	t=1	t=2	t=3
Palto	0	10	10
Pmedio	10	20	20
Pbajo	20	40	30

a) Plantee un modelo de programación dinámica determinística que permita a la aerolínea definir, en cada periodo, el precio de los asientos y la cantidad de asientos a vender, de manera de maximizar el beneficio por vuelo. En este modelo no se permite la sobreventa (vender si no tengo capacidad) ni las cancelaciones de los tickets (si se vendió un asiento, ya no se cuenta con esa capacidad).

b) Resuelva el modelo anterior, especifique cual(es) es(son) la(s) políticas de precios óptimas y el beneficio máximo que puede obtenerse. Analice el resultado obtenido y determine la política que aplicaría usted, en caso de existir más de una.

HINT: Considere que las cantidades vendidas en cada periodo son en lotes de 10. Es decir, pueden venderse 10, 20, 30, 40, etc. Asientos en cada periodo. Además, se asume que si existe demanda para un precio dado, es obligación vender algo de capacidad.

Pregunta 3 – Examen, 2004/2:

La Asociación Nacional de Fútbol Profesional (ANFP) ha decidido contratar a dos prestigiosos consultores italianos en optimización, Alessandro Cassado y Paolo Reinetta, a fin de que mediante la utilización de modelos matemáticos diseñen el fixture (programa de enfrentamientos entre los equipos a lo largo del torneo) del Campeonato Apertura del fútbol chileno 2005.

Los datos que les hizo llegar la ANFP son los siguientes:
Disputarán el campeonato 20 equipos que se enfrentarán todos contra todos a lo largo de 19 fechas. Cada fecha consta de 10 partidos donde juegan los 20 equipos del torneo, y cada enfrentamiento entre dos equipos se da exactamente una vez a lo largo del campeonato.

- Cada equipo debe jugar 9 o 10 partidos en condición de local (y el resto de sus partidos en condición de visita).
- Cada equipo puede jugar a lo más 2 partidos consecutivos como local y 2 partidos consecutivos como visita.
- Cuando la Universidad de Chile juega de local, el Colo-Colo debe jugar como visita, y viceversa.
- Los clásicos (partidos entre sí de la Universidad de Chile, el Colo-Colo y la Universidad Católica) deben jugarse de la fecha 10 en adelante.

Además, se sabe que la fecha 4 y la fecha 12 serán las únicas que se disputarán en miércoles (y no en fin de semana) y que los equipos prefieren no jugar de local los días miércoles porque las recaudaciones bajan sensiblemente. Es por ello que Cassado y Reinetta han pensado en minimizar el número de equipos que juegan ambos miércoles en condición de local.
A pesar de sus conocimientos, los consultores no han podido resolver el problema y por ello le están solicitando ayuda a los alumnos del IN34A.

1. Diseñe un modelo de programación lineal entera que minimice el número de equipos que juegan ambos miércoles en condición de local, respetando las condiciones solicitadas por la ANFP.
2. ¿Cómo variaría el modelo si se le pide ahora que además de las condiciones mencionadas se incorpore una más que diga que obligatoriamente cada equipo debe jugar un miércoles de local y otro miércoles de visita? (o sea que cada equipo debe ser local en la fecha 4 y visita en la 12, o viceversa)

Solución:

Pregunta 1:

1.- Al definir problemas continuos se van agregando cotas (restricciones). Al mirar el problema dual, se puede observar que este aumenta en el número de variables. Es claro que resolver problemas con aumento de variables es menos trabajoso (en cuanto a la utilización de recursos) que resolver problemas con aumento de restricciones. Luego es de utilidad resolver el problema dual.
Otra respuesta válida es: Al ir agregando las restricciones que generan los nuevos nodos del árbol de B&B, la solución del nodo padre resulta ser infactible en los nodos hijos, por lo que no es posible partir de ella para seguir iterando utilizando simplex.
Sin embargo, al reconocer que la nueva restricción solo agrega una nueva variable en el problema dual, es evidente que la solución dual del nodo padre es factible en los problemas duales de los nodos hijos por lo que resulta natural utilizar el concepto de dualidad para resolver los problemas lineales que se van generando en las ramificaciones en el algoritmo B&B.

2.- Un algoritmo es una secuencia finita de pasos que garantiza el encontrar una solución de un problema para una instancia dada. La complejidad de un algoritmo varía, pero puede llegar a ser muy complejo e impracticable de resolver computacionalmente. Es por ello que para resolver problemas muy complejos es mejor utilizar una heurística, que si bien no asegura llegar al óptimo, obtiene buenas soluciones en un tiempo razonable. En general en problemas polinomiales se suele usar algoritmos exactos y en problemas NP-completos (sobre todo de gran dimensión) se suelen usar heurísticas.

3.- El algoritmo Dijkstra sería útil para este problema. Podríamos modelarlo de tal forma que los nodos fueran las esquinas de las calles, los arcos fueran las calles y el costo del arco equivaldría a la distancia de la calle de esquina a esquina (de nodo a nodo). Al resolver este problema, obtendríamos la ruta más económica (o en este caso, la de menor distancia) entre 2 esquinas, lo que es suficiente para mostrar en pantalla el recorrido entre un punto de la ciudad y otro.

4.- Las variables de decisión son decisiones cuantificables cuyos valores se intenta determinar por medio de la resolucion del modelo. Su valor determina el valor de las variables de estado de las etapas futuras. Las variables de estado son variables que caracterizan la situacion en la que se encuentra el sistema en una etapa dada. Estas variables dan la independencia a la etapa actual de las etapas anteriores, por lo que deben existir tantas variables de estado como las que permitan establecer en que condiciones comienza (o finaliza) una etapa para su posterior optimizacion. Las variables exogenas o parametros representan los valores conocidos del sistema y se diferencian de las variables de decision en que no son controlables.

Pregunta 2:

a) Se plantea el modelo teórico:

Etapas:
meses $t = \{1,2,3\}$

Variable de Estado:
$S_t =$ Cantidad de asientos disponible en al inicio del mes t.

Variables de Decisión:
$X_t =$ Cantidad de asientos que se venden en el mes t.

$P_t =$ Precio en el mes t (alto, medio o bajo).

o equivalentemente definir variables binarias.

$$P_{Alto}^{t} = \begin{cases} 1 & si\ se\ \ fija\ \ precio\ alto\ en\ t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$P_{Medio}^{t} = \begin{cases} 1 & si\ se\ \ fija\ \ precio\ medio\ en\ t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$P_{bajo}^{t} = \begin{cases} 1 & si\ se\ \ fija\ \ precio\ bajo\ en\ t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Función de transformación:

$$S_{t+1} = S_t - X_t$$

Función de beneficio:

$$V_t(S_t, P_t, X_t) = P_t X_t + V_{t+1}{}^{*}(S_{t+1})$$

$$V_t^{*}(S_t) = \underset{P_t, X_t}{Max}\{V_t(S_t, P_t, X_t)\}$$

$$st. \quad X_t \leq Min\left\{S_t, D_t(P_t)\right\}$$

Condiciones de borde:

$$S_1 = 50$$

$$V_4^{*}(\%) = 0$$

En caso de usar variables binarias, la función de beneficio queda:

$$V_t(S_t, \vec{P}_t, X_t) = (P_{Alto}^{t} \cdot P_{Alto} + P_{Medio}^{t} \cdot P_{Medio} + P_{bajo}^{t} P_{bajo}) X_t + V_{t+1}{}^{*}(S_{t+1})$$

Con $P_{Alto}, P_{medio}, P_{bajo}$ el VALOR del precio, en este caso 1000, 650 y 500 respectivamente (Fíjense que P^t es la variable binaria).

$$V_t^{*}(S_t) = \underset{\vec{P}_t, X_t}{Max}\{V_t(S_t, \vec{P}_t, X_t)\}$$

$$st. \quad X_t \leq Min\left\{S_t, D_t(\vec{P}_t)\right\}$$

$$P_{Alto}^{t} + P_{Medio}^{t} + P_{bajo}^{t} = 1$$

b) Resolución

Mes 3

	Palto	**Pmedio**		**Pbajo**					
S3	10	10	20	10	20	30	P_3*	X_3*	V_3*
50	10000	6500	13000	5000	10000	15000	**Pbajo**	30	15000
40	10000	6500	13000	5000	10000	15000	**Pbajo**	30	15000
30	10000	6500	13000	5000	10000	15000	**Pbajo**	30	15000
20	10000	6500	13000	5000	10000	-	**Pmedio**	20	13000
10	10000	6500	-	5000	-	-	**Palto**	10	10000
0	-	-	-	-	-	-	**-**	-	0

Mes 2

	Palto	**Pmedio**		**Pbajo**						
S2	10	10	20	10	20	30	40	P_2*	X_2*	V_2*
50	25000	21500	28000	20000	25000	28000	30000	**Pbajo**	40	30000
40	25000	21500	26000	20000	23000	25000	20000	**Pmedio**	20	26000
30	23000	19500	23000	18000	20000	15000	-	**Palto o Pmedio**	10 o 20	23000

Mes 1

	Palto	**Pmedio**	**Pbajo**				
S1	0	10	10	20	P_1*	X_1*	V_1*
50	30000	32500	31000	33000	**Pbajo**	20	33000

Existen dos políticas de precios:

Mes	**P**	**X**
1	**Pbajo**	20
2	**Palto**	10
3	**Pmedio**	20

Mes	**P**	**X**
1	**Pbajo**	20
2	**Pmedio**	20
3	**Palto**	10

Y ambas generan un beneficio de 33.000.
Ambas políticas permiten vender todos los asientos del vuelo. Sin embargo la segunda opción debería ser la comercialmente óptima. Pues va subiendo el precio en forma creciente según se aproxima la fecha de salida del vuelo. Mientras que la 1 tiene una subida y luego una caída del precio, que podría prestarse para que los clientes que usualmente demandan a dos meses de la salida del vuelo, esperen hasta el último mes, pues saben que los tickets estarán más baratos.

Pregunta 3:

1.-

Variables de decisión:

X_{ijk} =1 si i juega contra j de local en la fecha k; 0 en caso contrario

Y_i = 1 si i juega sus dos partidos de local los miércoles; 0 en caso contrario

Restricciones:

1. Cada equipo juega una vez por fecha:

$$\sum_{j/j\neq i} Xijk + Xjik = 1 \qquad \forall i \qquad \forall k$$

2. Cada partido se disputa una vez en el torneo:

$$\sum_{k} (Xijk + Xjik) = 1 \qquad \forall i\neq j$$

3. Cada equipo tiene 9 o 10 localías por torneo:

$$9 <= \sum_{k,j\ (j\neq i)} Xijk <= 10 \qquad \forall i$$

4. Un equipo no puede jugar 3 seguidos de local:

$$\sum_{j/j\neq i} Xijk + \sum_{j/j\neq i} Xij(k+1) + \sum_{j/j\neq i} Xij(k+2) <= 2 \qquad \forall i\ \forall k$$

(Hacer lo mismo para visita…).

5. La U (1) y el Colo-Colo (2) no pueden ser simultáneamente locales:

$$\sum_{j\neq 1} X1jk + \sum_{j\neq 2} X2jk = 1 \qquad \forall k$$

(Hacer lo mismo para visita)

6. Los clásicos de la fecha 10 en adelante:

Xijk =0 para todo (i,j) formado por 2 de los 3 grandes y k<=9

7. Condición de variables Yi:

$$2^*Yi <= \sum_{j\neq i} Xij4 + \sum_{j\neq i} Xij12 <= 1 + Yi \qquad \forall i$$

8. Naturaleza de las variables:

Xijk, Yi en {0,1}

<u>Función objetivo</u>:

$$\mathbf{Min} \sum_{i} Yi$$

2.- Condición de miércoles: el que es local en la 4ª tiene que ser visitante en la 12ª

$$\sum_{j \neq i} Xij4 + \sum_{j \neq i} Xij12 = 1 \qquad \forall i$$

Retiro las variables Yi y la condición 7). Como busco ahora sólo una solución factible, en la función objetivo puedo poner cualquier cosa.

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl