INGENIERÍA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs: Guillermo Durán
Richard Weber
Auxs: Fernanda Bravo, André Carboni,
Rodrigo Wolf

Control 2

13 de Mayo 2009

Pregunta 1

1. (1.2 Ptos.) ¿Cuáles son los 3 criterios principales que guían el algoritmo simplex? Menciónelos e interprete brevemente qué objetivo tiene cada uno y cómo se logra dichos objetivos.

2. (1.2 Ptos.) ¿Cómo se da cuenta durante la aplicación del algoritmo simplex de óptimos alternativos, soluciones degeneradas y un problema no acotado? Mencione el criterio correspondiente y de la interpretación adecuada.

3. (1.2 Ptos.) ¿Es el algoritmo simplex un algoritmo polinomial? ¿Es el problema de Programación Lineal un problema polinomial? Justifique sus respuestas.

4. (1.2 Ptos.) Para aplicar el algoritmo simplex a un problema de programación lineal (P) necesita una base factible. Describa el problema auxiliar (P1) de Fase I para determinar sistemáticamente una base factible para (P). ¿Qué casos existen para la solución óptima de (P1)?

5. (1.2 Ptos.) Dado un problema de programación lineal (P) y su dual (D) ¿qué relaciones existen entre estos dos problemas? Mencione y comente tres. ¿Cuál es la interpretación económica del óptimo dual?

Pregunta 2

Se tiene el siguiente problema (P)

$$\begin{aligned}
&\min \quad 3\cdot x_1 + x_2 \\
&4\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \geq -20 \qquad (1)\\
&5\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \geq -16 \qquad (2)\\
&x_1 + 4\cdot x_2 \geq -12 \qquad (3)\\
&-3\cdot x_1 + x_2 \geq 0 \qquad (4)\\
&x_1, x_2 \leq 0
\end{aligned}$$

1. (0,5 Ptos.) Escriba el problema en forma estándar.

2. (1 Ptos.) Grafique el problema e indique las soluciones básicas y las restricciones que las definen. Cuáles de estas soluciones son básicas factibles para el problema?. Encuentre el óptimo gráficamente.

3. (1.5 Ptos.) Tras la primera iteración del algoritmo se tiene la matriz básica B_2 y la matriz no básica R_2. Cuál es el valor de las variables básicas y no básicas?. A qué solución básica factible corresponde en su gráfico? Por qué no estamos en el óptimo del problema? Cuál variable debiese entrar y cuál salir de la

base?

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. (1 Ptos.) Agregue la restricción $x_1 + x_2 \leq -2$ al problema original, muestre el nuevo poliedro y valide el óptimo mediante el algoritmo Simplex. Debería utilizar Fase I, por qué?

5. (0,5 Ptos.) Cómo tendrían que cambiar el costo asociado a x_1 de la restricción 1, para que ésta sea redundante en el problema?, que punto será el óptimo, que puede decir de él?

6. (1,5 Ptos.) Escriba el dual del problema original. Utilizando las condiciones de holgura complementaria determine al valor de las variables duales en el óptimo y su interpretación económica. Entregue una solucion factible del dual y compruebe que el dual es una cota del primal.

Pregunta 3

Es un conocido problema combinatorial el intentar ubicar la mayor cantidad de reinas en un tablero de ajedrez (8x8) de modo que ningún par de ellas se ataque entre sí. Decimos que 2 reinas se atacan entre sí, si están en la misma fila, en la misma columna o en la misma diagonal.

1. Diseñe un modelo de programacion lineal entera que permita encontrar la mayor cantidad de reinas que pueden colocarse en el tablero.

2. Como modificaría el problema si le piden lo mismo, pero para torres?

3. Como modificaría el problema si le piden lo mismo, pero para alfiles?

4. Explique (sin formular explicitamente todo el modelo) como resolveria el problema si le piden lo mismo, pero para caballos.

Nota: Los alfiles se mueven en el tablero solamente en diagonal, cualquier número de casillas; las torres en horizontal, cualquier número de casillas; y los caballos se mueven 2 casillas para adelante/atrás y 1 para la derecha/izquierda, o 1 casilla para adelante/atrás y 2 para la derecha/izquierda.

INGENIERÍA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs: Guillermo Durán, Richard Weber
Auxs: Fernanda Bravo, André Carboni, Rodrigo Wolf

Matrices invertidas Control 2

13 de Mayo 2009

$$B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ -22 & 11 & 33 & 0 \\ 1 & 19 & 0 & 33 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -22 & 11 & 33 & 0 & 0 \\ 1 & 19 & 0 & 33 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}$$

INGENIERÍA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs: Guillermo Durán,
Richard Weber
Auxs: Fernanda Bravo, André Carboni,
Rodrigo Wolf

Pauta Control 2

13 de Mayo 2009

Pregunta 1

1. (1.2 Ptos.) ¿Cuáles son los 3 criterios principales que guían el algoritmo simplex? Mencióneles e interprete brevemente qué objetivo tiene cada uno y cómo se logra dichos objetivos.
   - **Criterio de Optimalidad:** Si una solución básica factible es tal que los costos reducidos son todos positivos ($C_j < 0$), la solución es óptima (la base asociada se llama base óptima).
   Interpretación: Si ocurre que algún costo reducido es negativo, entonces aquellas columnas con costo reducido negativo pueden entrar a la base y mejorar el valor de la función objetivo.

   - **Criterio de entrada a la base:** Se usa para determinar que variable entra a la base, para ello, se escoge la variable asociada al costo reducido C_s tal que $C_s = \text{mín}_{C_j<0} C_j \quad \forall j$.
   Interpretación: El criterio de entrada a la base indica que la vari able no básica que entra es aquella que tiene el menor costo reducido, dentro de aquellos que son ¡0. Se ha adoptado esta convención porque trae el mayor mejoramiento local.

   - **Criterio de salida de la base:** Se usa para determinar que variable sale de la base. El criterio es el siguiente: $\text{mín}_{a_i s}\{\frac{\bar{b_{is}}}{\bar{a_{is}}}\}$.
   Interpretación: si se tiene que la variable que entra a la base es xs, para saber cual es la variable que sale de la base es necesario determinar cual es la variable que primero se anula cuando x_s crece, para no salirse del espacio factible. Esto es buscar la primera variable que se anula en cada una de las restricciones del problema en su forma estándar. De aquí sale la fórmula anterior.

2. (1.2 Ptos.) ¿Cómo se da cuenta durante la aplicación del algoritmo simplex de óptimos alternativos, soluciones degeneradas y un problema no acotado? Mencione el criterio correspondiente y de la interpretación adecuada.
   Óptimos alternativos:
   Si en el óptimo existe al menos una variable no básica con costo reducido nulo (y que tiene rango factible para crecer), el problema admite puntos óptimos alternativos.

   Soluciones degeneradas:
   La última solución básica factible contiene una variable básica cuyo valor es 0, cualquiera sea la base elegida

   Problema no acotado:
   Si en la última iteración del simplex, aquel C_{R_s} que es < 0 y los coeficientes de la columna asociada a x_s son todos ≤ 0. Entonces x_s puede crecer indefinidamente, por lo que el problema es no acotado.

3. (1.2 Ptos.) ¿Es el algoritmo simplex un algoritmo polinomial? ¿Es el problema de Programación Lineal un problema polinomial? Justifique sus respuestas.
   No, es un algoritmo exponencial, ya que si bien el algoritmo en general se comporta de manera eficiente si existen casos en que simplex toma un tiempo exponencial para resolver el problema. Por su parte el problema de programación lineal si es polinomial ya que existen algoritmos que lo resuelven en tiempo

polinomial en el tamaño del problema, por ejemplo el metodo de las elipsoides o el de Nesterov y Nemirovskii (basta que digan que existen)

4. (1.2 Ptos.) Para aplicar el algoritmo simplex a un problema de programación lineal (P) necesita una base factible. Describa el problema auxiliar (P1) de Fase I para determinar sistemáticamente una base factible para (P). ¿Qué casos existen para la solución óptima de (P1)?
El problema (P_1) de fase I es:

$$\begin{aligned} Max \quad w = \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{m} t_i \qquad (P_1) && (1)\\ & Ax + It \leq b \quad b \geq 0 && (2)\\ & x, t \geq 0 && (3) \end{aligned}$$

Es apropiado usar fase 1 cuando no es secillo encontrar una base inicial factible. Donde ti son variables artificiales. La solución básica factible inicial para este nuevo problema es x=0 y t=b, B=I. Lo sencillo acá es que en este caso la identidad sirve como solución factible básica inicial.

Cuando la base óptima del problema de fase I incluye alguna de las variables t_i, ésta no nos sirve como base inicial factible del problema original, ante tal situación hay dos alternativas (basta que mencionen una de ellas): agregar estas variables al problema original (el algoritmo simplex se encargará de eliminarlas) o se continua iterando en fase I hasta que las variables artificiales que agregamos salgan.

5. (1.2 Ptos.) Dado un problema de programación lineal (P) y su dual (D) ¿qué relaciones existen entre estos dos problemas? Mencione y comente tres. ¿Cuál es la interpretación económica del óptimo dual?

Estos problemas son cotas uno del otro, si (P) es de maximización, entonces (D) es de minimización. Mostramos, para un problema primal, su dual correspondiente:

$$\begin{aligned} Min \quad w = \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i t_i \quad (P) && (4)\\ & Ax \leq b && (5)\\ & x_i \geq 0 \qquad \forall i && (6) \end{aligned}$$

El dual esquivalente es:

$$\begin{aligned} Max \quad z = \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{m} b_j y_j \quad (D) && (7)\\ & A^T y \leq c && (8)\\ & y_j \leq 0 \qquad \forall j && (9) \end{aligned}$$

Si (P) admite óptimo, entonces en el óptimo el valor de la fn. objetivo de (P) y (D) son iguales. En caso que (P) sea no acotado, entonces el (D) es infactible. En caso (D) no acotado, entonces (P) es infactible.

La variable dual Y_i en el óptimo representa el valor unitario en $ del recurso i. Se puede interpretar como cuanto estoy dispuesto a pagar por aumentar en una unidad la capacidad disponible del recurso i. Este análisis sólo tiene sentido si el problema primal tiene al menos una solución óptima básica no degenerada.

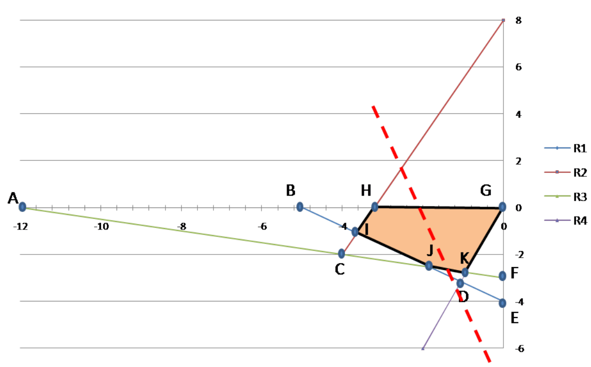
Pregunta 2

1. (0,5 Ptos.) Escribimos el problema de la manera estándar:

$$\text{mín} -3 \cdot x_1' - x_2'$$
$$4 \cdot x_1' + 5 \cdot x_2' + x_3 = 20$$
$$5 \cdot x_1' - 2 \cdot x_2' + x_4 = 16$$
$$x_1' + 4 \cdot x_2' + x_5 = 12$$
$$-3 \cdot x_1' + x_2' + x_6 = 0$$
$$x_1', x_2', x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

2. (1 Ptos.) Grafique el problema e indique las soluciones básicas y las restricciones que las definen. Cuáles de estas soluciones son básicas factibles para el problema?. Encuentre el óptimo graficamente.

   El poliedro del problema se grafica a continuación:



   Notar que pueden haber graficado el problema en forma estándar, por lo que el poliedro queda en el cuadrante I (es un espejo del gráfico aquí mostrado).

   Soluciones Básicas:
   A (-12,0) restricciones activas $R_3 \wedge x_2 = 0$
   B (-5,-4) restricciones activas $R_1 \wedge x_2 = 0$
   C (-4,-2) restricciones activas $R_2 \wedge R_3$
   D ($\frac{-20}{19}$,$\frac{-60}{19}$)restricciones activas $R_1 \wedge R_4$
   E (0,-5) restricciones activas $R_1 \wedge x_1 = 0$
   F (0,-3) restricciones activas $R_3 \wedge x_1 = 0$
   G (0,0) restricciones activas $R_4 \wedge x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$
   H (-3.2,0) restricciones activas $R_2 \wedge x_2 = 0$
   I ($\frac{-40}{11}$,$\frac{-12}{11}$) restricciones activas $R_1 \wedge R_2$
   J ($\frac{-20}{11}$,$\frac{-28}{11}$) restricciones activas $R_1 \wedge R_3$
   K ($\frac{-12}{13}$,$\frac{-36}{13}$) restricciones activas $R_3 \wedge R_4$

   Las soluciones básicas factibles son aquellos puntos en que además de existir al menos dos restricciones li activas, se cumplen todas las demas restricciones del problema. Estos puntos son G, H, I, J, K.

   El óptimo es en el punto I, el valor de la función objetivo es -12.

   Para la corrección, no es necesario que indiquen las coordenadas de cada punto, sólo que indiquen que restricciones son activas en cada uno de ellos y los indiquen en el gráfico.

3. (1 Ptos.) Tras la primera iteración del algoritmo se tiene la matriz básica B_2 y la matriz no básica R_2. Cuál es el valor de las variables básicas y no básicas?. A qué solución básica factible corresponde en su gráfico? Por qué no estamos en el óptimo del problema? Cuál variable debiese entrar y cuál salir de la base?

   Notamos que dada la matriz básicas, sus columnas corresponden a las variables (x_3, x'_1, x_5, x_6) y en la reducida (x_4, x'_2).

   Las variables básicas quedan definidas por :
   $$x_B = B_2^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & -4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 36/5 \\ 16/5 \\ 44/5 \\ 48/5 \end{pmatrix}$$
   Las variables no básicas $x_{NB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   Este punto equivale al punto H cuyas coordenadas son $(-16/5, 0)$.

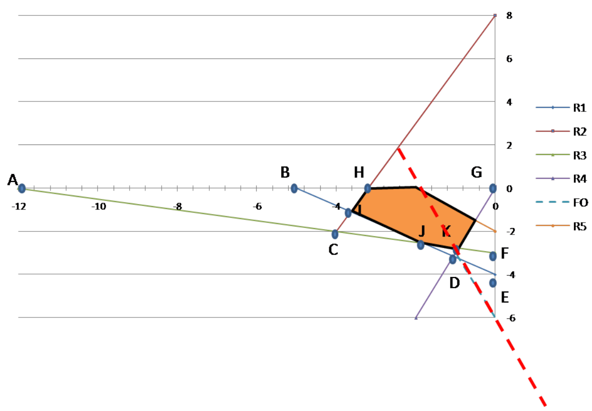
   Para saber si estamos en el óptimo necesitamos calcular los costos reducidos:
   $$\bar{c}_R^T = c_{NB}^T - c_B^T B_2^{-1} R_2 = (0,-1) - (0,-3,0,0) \begin{pmatrix} 1 & -4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (3/5, -11/5)$$

   Como el vector de costos reducidos posee una componente menor o igual a cero, entra la variables asociada al costo negativo a la base, esto es x_2.

   Veamos que variable debiese salir de la base:
   $Min_{a_{is} \geq 0} \left(\frac{36/5}{5}, \frac{44/5}{4}, \frac{48/5}{1} \right)$, donde el primer elemento toma el menor valor (1.44, 2.2, 9.6). Sale x_3 de la base.

4. (1,5 Ptos.) Agregue la restricción $x_1 + x_2 \leq -2$ al problema original, muestre el nuevo poliedro y valide el óptimo mediante el algoritmo Simplex. Debería utilizar Fase I, por qué?

   El poliedro se muestra a continuación:



Notamos, que no es necesario aplicar Simplex en Fase I, pues nos piden que validemos el óptimo mediante simplex. Luego podemos partir con el vértice de la parte anterior o bien con el mismo óptimo, utilizando la base factible que corresponda. En caso de no tener esta base factible inicial o que pidan encontrarla, deberíamos hacer Simplex en Fase I pues el origen no está contenido en la región factible, luego no podríamos empezar con la base dada por las variables de holgura del problema.

El problema original estandar queda:

$$\begin{gathered}
\text{mín} -3\cdot x_1' - x_2' \\
4\cdot x_1' + 5\cdot x_2' + x_3 = 20 \\
5\cdot x_1' - 2\cdot x_2' + x_4 = 16 \\
x_1' + 4\cdot x_2' + x_5 = 12 \\
-3\cdot x_1' + x_2' + x_6 = 0 \\
-x_1' - x_2' + x_7 = -2 \\
x_1', x_2', x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{gathered}$$

Si consideramos el punto I como la base factible inicial, las variables básicas son $(x_1', x_2', ?, ?, ?)$ y sabemos que en este punto se cumplen con igualdad las restricciones 1 y 2, por ende las variables de holgura asociadas a estas retricciones (x_3, x_4), son 0, y dado que no tenemos soluciones degeneradas, son variables no básicas.

La matriz básica factible esta definida por las columnas correspondientes a $(x_1', x_2', x_5, x_6, x_7)$:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y la reducida } R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Inviertiendo la matriz B.

$$B^{-1} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -22 & 11 & 33 & 0 & 0 \\ 1 & 19 & 0 & 33 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}, \bar{R} = B^{-1}R = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -4 \\ -22 & 11 \\ 1 & 19 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 40/11 \\ 12/11 \\ 4 \\ 108/11 \\ 30/11 \end{pmatrix}$$

Calculando los costos reducidos: $\bar{c}_R^T = c_{NB}^T - c_B^T B^{-1} R = (0,0) - (-3,-1,0,0,0)\frac{1}{33}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -4 \\ -22 & 11 \\ 1 & 19 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} =$

$(0,0) - (-1/3,-1/3) = (1/3,1/3) \geq 0$

Como los costos reducidos son positivos, estamos en el óptimo.

5. (0,5 Ptos.) Cómo tendrían que cambiar el costo asociado a x_1 de la restricción 1, para que ésta sea redundante en el problema?, que punto será el óptimo, que puede decir de él?
Para que la restricción 1 sea redundante los costos deben cambiar de tal forma que ahora el punto C sea el óptimo del problema. El costo asociado a x_1 debe cambiar de a $5/2$. Con esto el nuevo óptimo es una solución degenerada, la cual esta sobre definida, 3 restricciones li activas, siendo que sólo son necesarias 2. La restricción al ser redundante puede ser eliminada del problema.

6. (1,5 Ptos.) Escriba el dual del problema original. Utilizando las condiciones de holgura complementaria determine al valor de las variables duales en el óptimo y su interpretación económica. Entregue una solucion factible del dual y compruebe que el dual es una cota del primal.

El dual del problema original es:

$$\begin{aligned} &\text{máx} -20\cdot y_1 - 16\cdot y_2 - 12\cdot y_3 \\ &4\cdot y_1 + 5\cdot y_2 + y_3 - 3\cdot y_4 \geq 3 \\ &5\cdot y_1 - 2\cdot y_2 + 4\cdot y_3 + y_4 \geq 1 \\ &y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Las condiciones de holgura complementaria:

$(4\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 20)y_1 = 0$
$(5\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + 16)y_2 = 0$
$(x_1 + 4\cdot x_2 + 12)y_3 = 0$
$(-3\cdot x_1 + x_2)y_4 = 0$
y
$(3 - (4\cdot y_1 + 5\cdot y_2 + y_3 - 3\cdot y_4))x_1 = 0$
$(1 - (5\cdot y_1 - 2\cdot y_2 + 4\cdot y_3 + y_4))x_2 = 0$
Evaluando para $(x_1, x_2) = \frac{-40}{11}, \frac{-12}{11}$:

$\Rightarrow y_3 = y_4 = 0$ y resolviendo:

$(3 - (4\cdot y_1 + 5\cdot y_2))\frac{-40}{11} = 0$
$(1 - (5\cdot y_1 - 2\cdot y_2))\frac{-12}{11} = 0$
$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{3}$ y $y_2 = \frac{1}{3}$

En general, la solución dual óptima de un problema lineal, es el vector de las tasas marginales de variación del valor óptimo de la función objetivo, ante variaciones unitarias en los valores de las componentes del vector lado derecho. En la práctica el vector lado derecho puede corresponder a la cota máxima de disponibilidad de los recursoso bien a los niveles mínimos de las actividades productivas. Comparando los valores de las tasas marginales se puede determinar cuales son los recursos o actividades más críticas, esto es la importancia relativa entre los recursos o actividades.

Sea (1,0,0,0) solución factible para el dual, el valor de la función objetivo es -20. El dual es una cota del primal, en este caso sabemos que el primal tiene valor, -12, luego validamos que el dual es una cota del primal.

Pregunta 3

• Problema para reinas (3.5 ptos)

Conjunto de casilleros $N = 1..,8$
$NxN = (i,j)$ casillero en la fila i, columna j del tablero

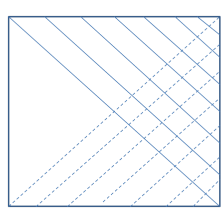
Variables de decisión:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se pone reina en posición (i,j)} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Restricciones:

1. Una reina a lo más en cada fila
$$\sum_j X_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in N$$
2. Una reina a lo más en cada columna
$$\sum_i X_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in N$$
3. En diagonales a lo más una reina

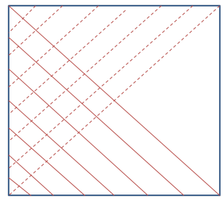
   diagonal continua:
$$\sum_{k=1}^{n-j} X_{k,k+j} \leq 1 \quad \forall j \in 0,...,n-1$$
   diagonal cortada:
$$\sum_{k=1}^{n-j} X_{k+j,k} \leq 1 \quad \forall j \in 0,...,n-1$$



   diagonal continua:
$$\sum_{k=1}^{n-j} X_{n+1-k,k+j} \leq 1 \quad \forall j \in 0,...,n-1$$

diagonal cortada:

$$\sum_{k=1}^{n-j} X_{n+1-k-j,k} \leq 1 \quad \forall j \in 0,\ldots,n-1$$



4. Naturaleza de las variables

$$X_{ij} \in \{0,1\}$$

Función Objetivo:

$$Max \quad \sum_{i,j} X_{ij}$$

• **Problema para Torres (0.75 ptos.)**

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se pone torre en posición (i,j)} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

1. Una torre a lo más en cada fila

$$\sum_{j} X_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in N$$

2. Una torre a lo más en cada columna

$$\sum_{i} X_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in N$$

3. Naturaleza de las variables

$$X_{ij} \in \{0,1\}$$

Función Objetivo:

$$Max \quad \sum_{i,j} X_{ij}$$

• **Problema para Alfiles (0.75 ptos.)**

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se pone alfil en posición (i,j)} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

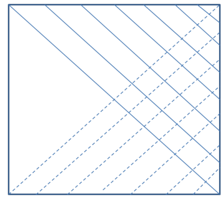
1. En diagonales a lo más un alfil

   diagonal continua:

$$\sum_{k=1}^{n-j} X_{k,k+j} \leq 1 \quad \forall j \in 0,\ldots,n-1$$

diagonal cortada:

$$\sum_{k=1}^{n-j} X_{k+j,k} \leq 1 \quad \forall j \in 0,...,n-1$$

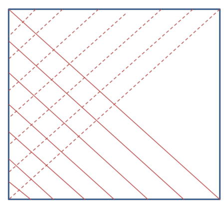


diagonal continua:

$$\sum_{k=1}^{n-j} X_{n+1-k,k+j} \leq 1 \quad \forall j \in 0,...,n-1$$

diagonal cortada:

$$\sum_{k=1}^{n-j} X_{n+1-k-j,k} \leq 1 \quad \forall j \in 0,...,n-1$$



2. Naturaleza de las variables

$$X_{ij} \in \{0,1\}$$

Función Objetivo:

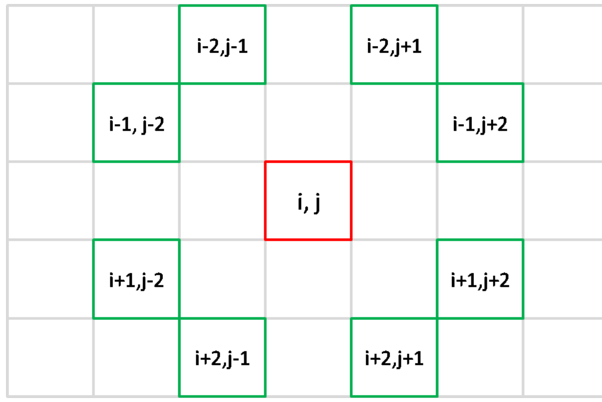
$$Max \quad \sum_{i,j} X_{ij}$$

• Problema para caballos (1 ptos)

Para el movimiento de los caballos, basta con explicar los casos que deben considerarse.

En la siguiente figura se esquematiza para una posición (i,j) del tablero, los posibles caballos que podrian atacar. Sea la variable:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se pone caballo en posición (i,j)} \\ 0 & \sim \end{cases}$$



Se deben considerar 8 restriccciones. Tal que si pongo un caballo en la posición (i, j), entonces de no debe haber otro caballo en las otras o casillas señaladas.

$X_{i-1,j+2} \leq 1 - X_{ij}$
$X_{i-2,j+1} \leq 1 - X_{ij}$
$X_{i+1,j+2} \leq 1 - X_{ij}$
$X_{i-2,j+1} \leq 1 - X_{ij}$
$X_{i-1,j-2} \leq 1 - X_{ij}$
$X_{i-2,j-1} \leq 1 - X_{ij}$
$X_{i+1,j-2} \leq 1 - X_{ij}$
$X_{i-2,j-1} \leq 1 - X_{ij}$

Se deben incluir las condiciones de borde para no salirse del tablero.

Para la corrección no es necesario que escriban las 8 restricciones, sólo que noten cuales son las combinaciones que deben considerar para cada casilla del tablero.

Dudas y/o comentarios a
Ma. Fernanda Bravo
mariabra@ing.uchile.cl