INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Guillermo Durán, Richard Weber

Auxiliares: Fernanda Bravo. André Carboni, Rodrigo Wolf

IN34A – Optimización
Auxiliar Extra Control 2
10 de Mayo, 2009

Pregunta 1 (Control 2, 2008/2):

Considere el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
&\max x_1 + x_2 \\
&\text{s.a.} \quad -2x_1 + 5x_2 \geq 0 \\
&\qquad\quad x_1 + 4x_2 \leq 16 \\
&\qquad\quad 4x_1 - 3x_2 \leq 7 \\
&\qquad\quad x_1 \geq 0 \\
&\qquad\quad x_2 \, irrestricta
\end{aligned}
$$

a. (0,5 pts.) Escriba el Problema en Forma Estándar
b. (1,0 pts.) Grafique el problema. Identifique la región factible, los puntos que podría describir mediante una base, cuántos de estos puntos son factibles y el óptimo del problema. ¿Cuánto vale la Función Objetivo en el óptimo? ¿Qué restricción adicional agregaría al problema original para hacer el problema más sencillo sin cambiar la región factible?
c. (1,0 pts.) ¿Qué particularidad tiene el origen? ¿Qué bases describen este punto? ¿Es alguna infactible? Compruébelo. ¿Tendría sentido que lo fuera? ¿Necesitaría realizar Fase I para resolver el problema? ¿Por qué no?
d. (1,5 pts.) Aplique Simplex partiendo desde el óptimo encontrado en la parte b.
e. (1,5 pts.) Escriba el dual del problema original. Calcule el valor de las variables duales con el teorema de holgura complementaria. Interprételas. Calcule los precios sombra. Interprételos. Verifique que se cumpla el teorema Fundamental de Dualidad.
f. (0,5 pts.) ¿Cuánto puede aumentar el precio asociado a la segunda variable para que siga siendo el óptimo?

Nota: Para las partes b), c), d) y f) describa o interprete lo que va realizando en forma gráfica.

Problema 2 (Control 1 2009/1):

La reconocida empresa CCC (Compañía de Cervezas Carboni), debido al aumento sostenido de la demanda de cerveza en los últimos años, desea evaluar la instalación de nuevas plantas de malta. Para ello, el gerente de operaciones de la compañía le explica a usted, brevemente, el proceso productivo de la cerveza.

Existen en la región una serie de plantaciones de cebada, propiedad de la compañía, de las que se extrae y transporta cebada a alguna de las plantas de malta de la empresa. Además, existe una pequeña fracción de cebada que es importada y llevada directamente a las plantas. La cebada es procesada en esta planta, produciendo la malta. Ésta es luego transportada desde la planta a la cervecería, donde se termina de producir la cerveza, o bien es exportada.

Existe un conjunto J de posibles localizaciones para las plantas, de las cuales un subconjunto J_A ya está ocupado por las plantas actuales. Considere que, como máximo, puede instalarse sólo una planta de malta por año y que el horizonte de tiempo para el problema es de T años ($|J \backslash J_A| > T$).

Considere que existe un conjunto I de proveedores de cebada (donde i=1 corresponde a las importaciones y el resto a las plantaciones) y un conjunto K de puntos de demanda de malta (donde k=1 corresponde a las exportaciones y el resto a cervecerías). Cada uno de estos puntos demanda una cantidad D_{kt} de malta en el año t.

Cada proveedor de cebada (incluyendo importaciones) puede ofertar como máximo A_{it} toneladas de cebada en el año t y la capacidad de producción de la planta de malta en la ubicación j es C_j cada año. Es importante considerar que no toda la cebada es utilizable para producir malta, debido a los altos estándares de calidad de la compañía. Estudios preliminares han identificado la calidad de la cebada en las distintas plantaciones, por lo que se ha estimado el parámetro r_i, que corresponde a la cantidad de malta que se puede producir con una tonelada de cebada de la plantación i.

Los costos se han estimado previamente, siendo a_{ijt} el costo de transporte de cebada de la plantación i a la planta de malta j en el año t, m_{jkt} el costo de transportar malta de la planta j al punto de demanda k en el año t y s_{jt} el costo fijo por instalar una planta de malta en j en el año t.

Por último, por políticas de la empresa, considere que la cantidad de cebada importada debe corresponder a una proporción fija de la cantidad de malta exportada. Así, las toneladas de cebada importada no pueden ser menores al 80% ni mayores al 120% de las toneladas de malta exportada.

Plantee un modelo de programación lineal mixta, que permita decidir dónde instalar las nuevas plantas de malta y en qué año hacerlo, de modo de minimizar los costos totales en el horizonte de tiempo especificado y satisfaciendo la demanda en cada período. Para simplificar, considere que los efectos inflacionarios ya están considerados en los costos entregados.

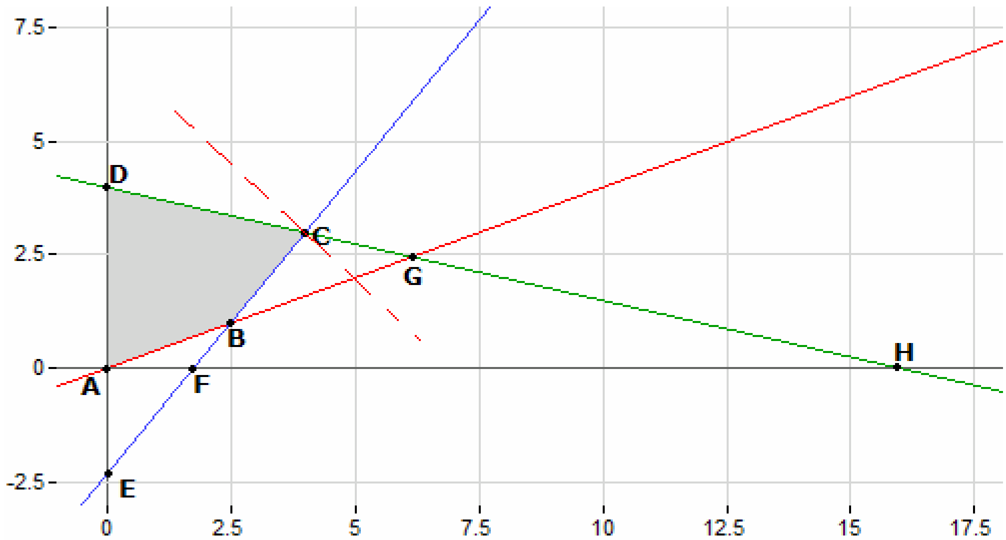
<u>Solución</u>

Problema 1:

a. La forma estándar del problema es:

$$\begin{aligned}
&\min -x_1 - x'_2 + x''_2 \\
&\text{s.a.} \quad -2x_1 + 5x'_2 - 5x''_2 - x_3 = 0 \\
&\qquad\quad x_1 + 4x'_2 - 4x''_2 + x_4 = 16 \\
&\qquad\quad 4x_1 - 3x'_2 + 3x''_2 + x_5 = 7 \\
&\qquad\quad x_2 = x_2' - x_2'' \\
&\qquad\quad x_1, x_3, x_4, x_5, x_2', x_2'' \geq 0
\end{aligned}$$

b. Gráficamente:



- Los puntos que se podrían plantear con una base son: A, B, C, D, E, G, que corresponden a la intersección de todas las restricciones del problema. Son en total 6 bases. **OJO**: Los puntos F y H no se pueden representar con una base, ya que en este problema x_2 es irrestricto, es decir, en esos puntos solo pasa una restricción como vimos en la clase. El eje esta dibujado como referencia, pero en este problema no funciona como restricción como en problemas habituales donde $x_2 \geq 0$.

- De estos 6 puntos, 4 son factibles (A, B, C, D). Por lo tanto, existen 4 bases factibles.

- El óptimo está en el punto C, donde $X_1=4$, $X_2=3$, con lo que Z=7.

- A este problema, se puede agregar la restricción $X_2 \geq 0$. Esta restricción no cambia la región factible del problema, y facilita el uso de simplex 'habitual'.

c. Suponiendo que agregamos la restricción $x2 \geq 0$, entonces el origen es un punto **degenerado**. Esto se puede argumentar de 2 formas:

- Se ve claramente en el gráfico, ya que el (0,0) está formado por la intersección de los 2 ejes y una restricción.

- Como en el punto existe una variable básica igual a cero, entonces es degenerado.

Nota de corrección: Ambas son correctas, aunque TIENEN que nombrar por lo menos la primera, ya que se pide expresamente la interpretación gráfica. Si ponen solo la segunda, descontar puntaje.

Este punto está descrito por 3 bases, que se muestran a continuación:

1. $Xr=(X_1,X_2)$; $Xb=(X_3,X_4,X_5)$
2. $Xr=(X_1,X_3)$; $Xb=(X_2,X_4,X_5)$
3. $Xr=(X_2,X_3)$; $Xb=(X_1,X_4,X_5)$

Estas 3 bases son factibles. No tendría sentido que no lo fueran, ya que se ve gráficamente que están en la región factible.

Verifiquémoslo (en el mismo orden):

1. $B^{-1}*b= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} > \vec{0}$ => Es factible
2. $B^{-1}*b= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} > \vec{0}$ => Es factible
3. $B^{-1}*b= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} > \vec{0}$ => Es factible

No es necesario usar fase 1, ya que el origen es un punto factible, como ya se ha demostrado.

d. *Si agregaron $X_2 \geq 0$*

En el óptimo, las variables básicas son $X_b=(X_1,X_2,X_3)$ y las no básicas $X_r=(X_4,X_5)$.

Calculamos:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3/19 & 4/19 \\ 0 & 4/19 & -1/19 \\ -1 & 14/19 & -13/19 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{R} = \begin{pmatrix} 3/19 & 4/19 \\ 4/19 & -1/19 \\ 14/19 & -13/19 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\overline{Cr} = (0 \quad 0) - (-1 \quad -1 \quad 0) * \overline{R}$$

$$\overline{Cr} = (7/19 \quad 3/19) \geq 0$$

Como ambos costos reducidos son positivos, estamos en el óptimo.

Por lo tanto, el punto óptimo es *X_1=4*, *X_2=3, X_3=7, X_4=X_5=0* y con esto *Z=7.*

Si no agregaron la restricción, tienen la forma estándar de la parte a:

En el óptimo, las variables básicas son: $x_b=(x_1, x_2', x_3)$ y las no básicas son $X_r=(x_2'', x_4, x_5)$.

Calculamos:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3/19 & 4/19 \\ 0 & 4/19 & -1/19 \\ -1 & 14/19 & -13/19 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{R} = \begin{pmatrix} 0 & 3/19 & 4/19 \\ -1 & 4/19 & -1/19 \\ 0 & 14/19 & -13/19 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\overline{Cr} = (1 \quad 0 \quad 0) - (-1 \quad -1 \quad 0) * \overline{R}$$

$$\overline{Cr} = (0{,}7/19 \quad 3/19) \geq 0$$

Como ambos costos reducidos son positivos, estamos en el óptimo.

Por lo tanto, el punto óptimo es *X_1=4*, *X'_2=3, X_3=7, x'_2=X4=X5=0* y con esto *Z=7.*

La interpretación gráfica va por el lado de señalar que, como estábamos comenzando desde el óptimo, es claro que simplex encontrará la solución en una sola iteración.

e. El dual (Ojo que el enunciado dice claramente “el dual del problema ORIGINAL”):

$$\begin{aligned} &\min w = \{0y_1 + 16y_2 + 7y_3\} \\ &\text{s.a.} \quad -2y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 1 \\ &\qquad 5y_1 + 4y_2 - 3y_3 = 1 \\ &\qquad y_1 \leq 0 \\ &\qquad y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Usando holgura complementaria:

$$(-2x^*_1 + 5x^*_2 - 0)\cdot y^*_1 = 0$$
$$(1x^*_1 + 4x^*_2 - 16)\cdot y^*_2 = 0$$
$$(4x^*_1 - 3x^*_2 - 7)\cdot y^*_3 = 0$$

$$(1 + 2y^*_1 - y^*_2 - 4y_3)\cdot x^*_1 = 0$$
$$(1 - 5y^*_1 - 4y^*_2 + 3y_3)\cdot x^*_2 = 0$$

Como x^*_1, x^*_2 y x^*_3 son distintos de cero, se debe cumplir que:

$$1 + 2y^*_1 - y^*_2 - 4y_3 = 0$$
$$1 - 5y^*_1 - 4y^*_2 + 3y_3 = 0$$
$y^*_1=0$ // Esta última sale de reemplazar los X* en la cuarta condición

De aquí,

$$1 - y^*_2 - 4y_3 = 0$$
$$1 - 4y^*_2 + 3y_3 = 0$$

Resolviendo el sistema, $y_1=0$, $y_2=7/19$, $y_3=3/19$ y $w=133/19=7$. Notar que $w=z$ (óptimo del primal = óptimo del dual), este es el teorema fundamental de la dualidad.

Los precios sombra se calculan como:

$$\Pi = C_b^T * B^{-1} = (-1,-1,0) * \begin{pmatrix} 0 & 3/19 & 4/19 \\ 0 & 4/19 & -1/19 \\ -1 & 14/19 & -13/19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/19 \\ 3/19 \end{pmatrix}$$

(los precios sombra y las variables duales son siempre iguales).

La variable dual Y_i en el óptimo representa el valor unitario en $ del recurso i. Se puede interpretar como cuanto estoy dispuesto a pagar por aumentar en una unidad la capacidad disponible del recurso i.
Este análisis sólo tiene sentido si el problema primal tiene al menos una solución óptima básica no degenerada.

g. Hay que verificar que se sigue cumpliendo la condición de optimalidad:

Si agregaron $X_2 \geq 0$

$$\overline{Cr} = (0 \quad 0) - (-1 \quad -C_2 \quad 0) * \overline{R}$$

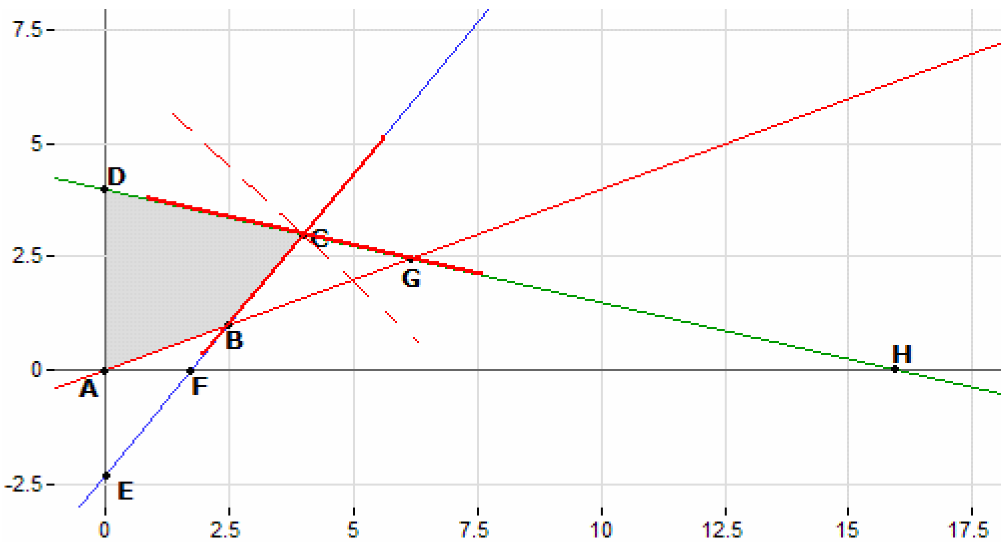
$$\overline{Cr} = (3/19 + 4C_2/19 \quad 4/19 - C_2/19) \geq 0$$

De aquí se obtienen las condiciones:

$$C_2 \geq -3/4$$
$$C_2 \leq 4$$

Por lo tanto, el precio de la segunda variable puede aumentar hasta 4.

Deben hacer la interpretación gráfica. Esto consiste en mostrar que el óptimo no cambia al variar la pendiente de la función objetivo al mover el coeficiente c_2 entre los valores señalados anteriormente.



En el límite, cuando $C_2=4$, la función objetivo alcanza la misma pendiente que la restricción $x_1 + 4x_2 + x_4 = 16$, habiendo infinitas soluciones. Si $C_2>4$, el óptimo cambia al punto D.
Análogamente, cuando $C_2=-3/4$, la función objetivo alcanza la misma pendiente que la restricción $4x_1 - 3x_2 + x_5 = 7$, habiendo infinitas soluciones. Si $C_2<-3/4$, el óptimo cambia al punto B.

Si NO agregaron $X_2 \geq 0$

$$\overline{Cr} = (C_2'' \quad 0 \quad 0) - (-1 \quad -C_2' \quad 0) * \overline{R}$$

$$\overline{Cr} = (C_2'' - C'_2 \quad 3/19 + 4C'_2/19 \quad 4/19 - C'_2/19) \geq 0$$

De aquí se obtienen las condiciones:

$$C_2' \geq -3/4$$
$$C_2' \leq 4$$
$$C_2'' \geq C_2'$$

La interpretación gráfica es análoga.

Problema 3:

<u>Variables</u>:

$Z_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{Si está instalada la planta de malta en la ubicación j en el año t} \\ 0 & \sim \end{cases}$

$X_{ijt} =$ Toneladas de cebada transportadas desde la plantación i a la planta j en el año t.

$Y_{jkt} =$ Toneladas de malta transportadas desde la plantación j al punto de demanda k en el año t.

<u>Restricciones</u>:

1) Satisfacer demanda:

$$\sum_j Y_{jkt} \geq D_{kt} \qquad \forall k,t$$

2) Cebada necesaria para producir malta:

$$\sum_k Y_{jkt} \leq \sum_i r_i * X_{ijt} \qquad \forall j,t$$

3) Capacidad de las plantas:

$$\sum_k Y_{jkt} \leq C_j \qquad \forall j \in J_A, t$$

$$\sum_k Y_{jkt} \leq C_j * Z_{jt} \qquad \forall j \in J \setminus J_A, t$$

4) Abrir la planta una sola vez:

$$Z_{jt} \leq Z_{jt+1} \qquad \forall j \in J \setminus J_A, t < T$$

5) Capacidad de producción de cebada:

$$\sum_j X_{ijt} \leq A_{it} \qquad \forall i,t$$

6) Una planta de malta por año como máximo:

$$\sum_{j \in J \setminus J_A} (Z_{jt} - Z_{jt-1}) \leq 1 \qquad \forall t$$

7) Cebada importada proporcional a malta exportada:

$$0{,}8 * \sum_j Y_{j1t} \leq \sum_j X_{1jt} \leq 1{,}2 * \sum_j Y_{j1t} \qquad \forall j, t$$

8) Condición de borde:

$$Z_{j0} = 0 \qquad \forall j \in J \setminus J_A$$

9) Naturaleza variables:

$$X_{ijt} \in \Re, Y_{jkt} \in \Re \ , Z_{jt} \in \{0,1\} \qquad \forall i, j, t$$

Fn. Objetivo:

$$\min\{\sum_{i,j,t} a_{ijt} * X_{ijt} + \sum_{j,k,t} m_{jkt} * Y_{jkt} + \sum_{t, j \in J \setminus J_A} s_{jt} * (Z_{jt} - Z_{jt-1})\}$$

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl