INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Guillermo Durán, Richard Weber

Auxiliares: Fernanda Bravo. André Carboni, Rodrigo Wolf

IN34A – Optimización
Control N°1
15 de Abril, 2009

Problema 1:

1. (1,5 ptos.) Explique qué significa que un problema de decisión esté en P, en NP y en NP-completo.
2. (1,5 ptos.) Describa el funcionamiento del método de Newton para optimización irrestricta (aproximación de la función f, iteración, dirección de descenso, paso) y explique la interpretación gráfica del método. ¿Qué varía en el método de Newton globalizado?
3. (1,5 ptos.) Sea el problema:
$$\min f(x)$$
$$s.a.\ g_i(x) \leq 0$$
¿Qué hipótesis se deben pedir para que el cumplimiento de las condiciones de KKT para un punto x* garantice que dicho punto es mínimo global del problema?
4. (1,5 ptos.)
   i. Formule y grafique un PPL con infinitas soluciones óptimas.
   ii. Formule y grafique un PPL infactible.
   iii. Formule y grafique un PPL con conjunto factible no acotado y solución óptima finita.

Problema 2:

Dado el siguiente problema:

$$\min f(x_1,x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 2)^2 \qquad (P)$$
$$s.a\ g_1(x_1,x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 1$$
$$g_2(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \geq 3$$

1. (1,2 ptos.) Desarrolle las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para el problema (P).
2. (1,2 ptos.) Revise el cumplimiento de las condiciones de KKT para los siguientes puntos:
$$(1,2)\ ;(1-\sqrt{1/2}\ ,\ 2+\sqrt{1/2})$$
¿Qué podemos concluir para cada uno de estos puntos? Justifique.
3. (1,2 ptos.) Muestre las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo gráficamente.
4. (1,2 ptos.) Determine un candidato para ser solución óptima analizando el gráfico. Verifique si este candidato cumple las condiciones de KKT. De la solución óptima y el valor de la función objetivo asociado.
5. (1,2 ptos.) Se agrega la siguiente restricción al problema (P):
$$g_3(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 1$$
¿Qué podemos decir acerca de la solución óptima del problema original aplicando KKT? Justifique su respuesta.

Problema 3:

La reconocida empresa CCC (Compañía de Cervezas Carboni), debido al aumento sostenido de la demanda de cerveza en los últimos años, desea evaluar la instalación de nuevas plantas de malta. Para ello, el gerente de operaciones de la compañía le explica a usted, brevemente, el proceso productivo de la cerveza.

Existen en la región una serie de plantaciones de cebada, propiedad de la compañía, de las que se extrae y transporta cebada a alguna de las plantas de malta de la empresa. Además, existe una pequeña fracción de cebada que es importada y llevada directamente a las plantas. La cebada es procesada en esta planta, produciendo la malta. Ésta es luego transportada desde la planta a la cervecería, donde se termina de producir la cerveza, o bien es exportada.

Existe un conjunto J de posibles localizaciones para las plantas, de las cuales un subconjunto J_A ya está ocupado por las plantas actuales. Considere que, como máximo, puede instalarse sólo una planta de malta por año y que el horizonte de tiempo para el problema es de T años ($|J \backslash J_A| > T$).

Considere que existe un conjunto I de proveedores de cebada (donde i=1 corresponde a las importaciones y el resto a las plantaciones) y un conjunto K de puntos de demanda de malta (donde k=1 corresponde a las exportaciones y el resto a cervecerías). Cada uno de estos puntos demanda una cantidad D_{kt} de malta en el año t.

Cada proveedor de cebada (incluyendo importaciones) puede ofertar como máximo A_{it} toneladas de cebada en el año t y la capacidad de producción de la planta de malta en la ubicación j es C_j cada año. Es importante considerar que no toda la cebada es utilizable para producir malta, debido a los altos estándares de calidad de la compañía. Estudios preliminares han identificado la calidad de la cebada en las distintas plantaciones, por lo que se ha estimado el parámetro r_i, que corresponde a la cantidad de malta que se puede producir con una tonelada de cebada de la plantación i.

Los costos se han estimado previamente, siendo a_{ijt} el costo de transporte de cebada de la plantación i a la planta de malta j en el año t, m_{jkt} el costo de transportar malta de la planta j al punto de demanda k en el año t y s_{jt} el costo fijo por instalar una planta de malta en j en el año t.

Por último, por políticas de la empresa, considere que la cantidad de cebada importada debe corresponder a una proporción fija de la cantidad de malta exportada. Así, las toneladas de cebada importada no pueden ser menores al 80% ni mayores al 120% de las toneladas de malta exportada.

Plantee un modelo de programación lineal mixta, que permita decidir dónde instalar las nuevas plantas de malta y en qué año hacerlo, de modo de minimizar los costos totales en el horizonte de tiempo especificado y satisfaciendo la demanda en cada período. Para simplificar, considere que los efectos inflacionarios ya están considerados en los costos entregados.

<u>Solución:</u>

Pregunta 1:

1)

- Estar en P: Existe un algoritmo polinomial que lo resuelve.
- Estar en NP: Existe un algoritmo no determinístico polinomial que lo resuelve o que existe un certificado verificable en tiempo polinomial.
- Estar en NP-Completo: Está en NP y además todo problema en NP se puede transformar polinomialmente en él.

2) Newton: Iteración k:

Calcular el gradiente de la función objetivo y verificar si $\nabla f(x^k) = 0$

2 casos posibles:

- Si no se cumple, calcular el inverso del hessiano de la función objetivo para obtener el siguiente punto como se indica a continuación:

$$x^{k+1} = x^k - [Hf(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$$

- Si se cumple, entonces se acaba la iteración y el punto x_k es el óptimo

Para llevar a Newton a ser Newton Globalizado, se agrega una minimización unidimensional en la dirección generada:

$$d^k = -[Hf(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k)$$

d^k es dirección de descenso si Hf(x) es definida positiva (y esto pasa si *f* es convexa).

En cada iteración se puede buscar un paso $\lambda_k > 0$ tal que $f(x^k + \lambda_k d^k) < f(x^k)$

$$\text{mín } f(x^k + \lambda_k d^k)$$

$$\text{s.a. } \lambda_k \geq 0$$

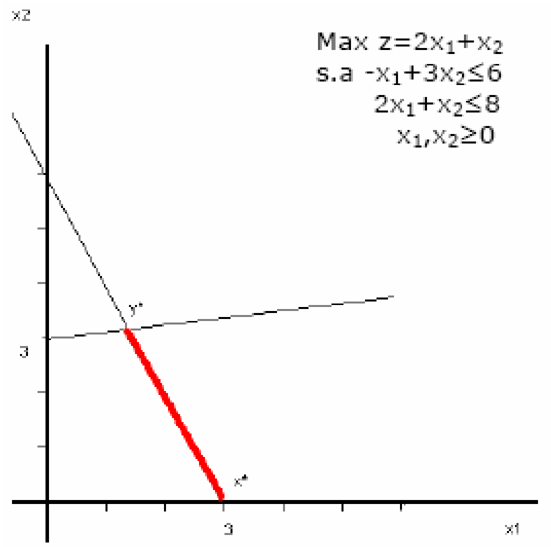
En cambio Newton trabaja con: $\lambda_k = 1$

3)

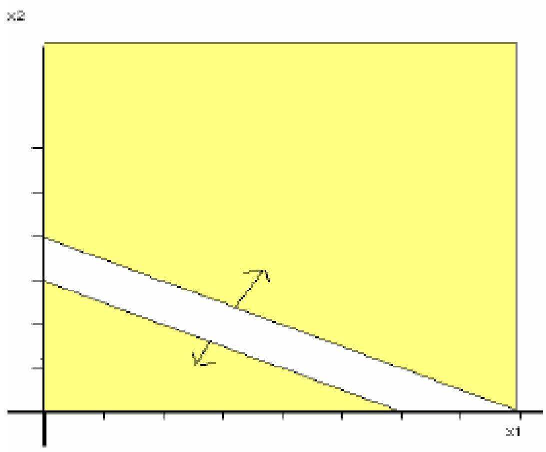
- x* mínimo local tal que se cumple la condición de regularidad en x*.
- $f \text{ y } g_i \in C^1$
- f convexa y región factible convexa.

4) Nota de corrección: Con un ejemplo para cada una basta, siempre y cuando grafiquen el mismo ejemplo que modelaron.

i) Infinitos óptimos: Esto sucede cuando la pendiente de la función objetivo tiene el mismo valor que la pendiente de una de las restricciones. (Son paralelas).

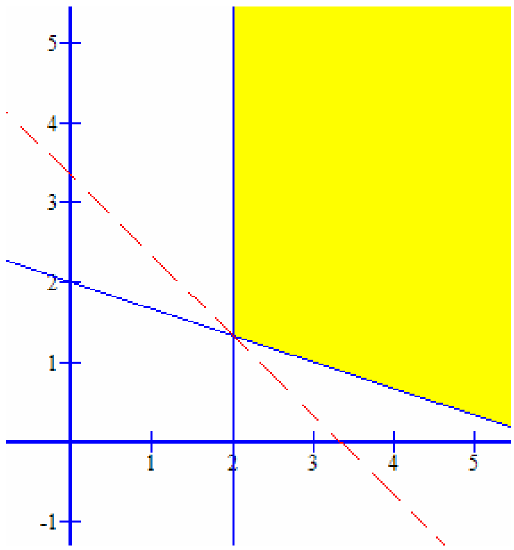


ii) PPL Infactible:



Max $z=2x_1+x_2$
s.a $x_1+2x_2\leq 6$
$x_1+2x_2\geq 8$
$x_1,x_2\geq 0$

iii) Espacio no acotado con solución finita:



Min x_1+x_2
s.a $x_1 >= 2$
$x_1+3x_2 >= 6$

Problema 2:

1. Primero se lleva el problema a la forma estándar

$$\begin{aligned}&\min f(x_1,x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 2)^2\\ &\text{s.a } g_1(x_1,x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 - 1 \leq 0\\ &\quad g_2(x_1,x_2) = 3 - x_1 - x_2 \leq 0\end{aligned}$$

Así, se tiene que las condiciones de KKT son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 2*(x_1-5) \\ 2*(x_2-2) \end{pmatrix} + \mu_1 * \begin{pmatrix} 2*(x_1-1) \\ 2*(x_2-2) \end{pmatrix} + \mu_2 * \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y

$$\begin{aligned}&\mu_1 * \ ((x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 - 1) = 0\\ &\mu_2 * (3 - x_1 - x_2) = 0\end{aligned}$$

2. Punto (1,2):

$$\begin{aligned}&\mu_1 * \ ((1-1)^2 + (2-2)^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = 0\\ &\mu_2 * (3-1-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_2 \in \Re\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} 2*(1-5) \\ 2*(2-2) \end{pmatrix} + \mu_2 * \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí se obtiene:

$$\begin{aligned}\mu_2 &= -8 < 0\\ \mu_2 &= 0\end{aligned}$$

¡Contradicción! Entonces no cumple KKT.

Punto $(1-\sqrt{1/2}\ ,\ 2+\sqrt{1/2})$**:**

$$\begin{aligned}&\mu_1 * \ ((1-\sqrt{1/2}-1)^2 + (2+\sqrt{1/2}-2)^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = \Re\\ &\mu_2 * (3-1+\sqrt{1/2}-2-\sqrt{1/2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_2 \in \Re\end{aligned}$$

entonces

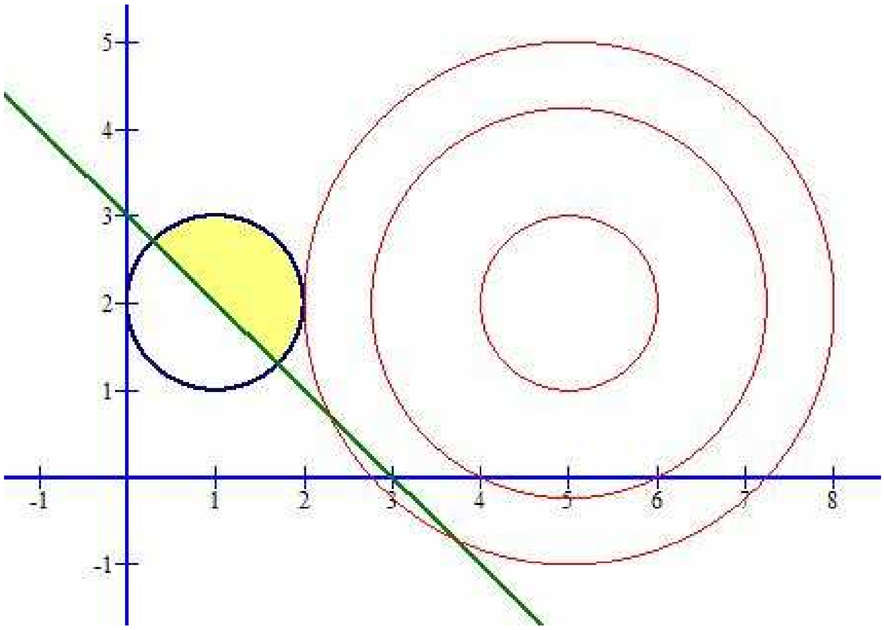
$$\begin{pmatrix} 2*(1-\sqrt{1/2}-5) \\ 2*(2+\sqrt{1/2}-2) \end{pmatrix} + \mu_1 * \begin{pmatrix} 2*(1-\sqrt{1/2}-1) \\ 2*(2+\sqrt{1/2}-2) \end{pmatrix} + \mu_2 * \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí se obtiene:

$$\mu_1 = -(2+\sqrt{1/2})/\sqrt{1/2} \ <0$$
$$\mu_2 = -4 < 0$$

Entonces no cumple KKT.

3.



4. Del gráfico anterior, se observa claramente que el óptimo está en el punto (2,2), por lo que proponemos dicho punto. Entonces:

$$\mu_1 * \ ((2-1)^2 + (2-2)^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 \in \Re$$
$$\mu_2 * (3-2-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_2 = 0$$

Por lo que

$$\begin{pmatrix} 2*(2-5) \\ 2*(2-2) \end{pmatrix} + \mu_1 * \begin{pmatrix} 2*(2-1) \\ 2*(2-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

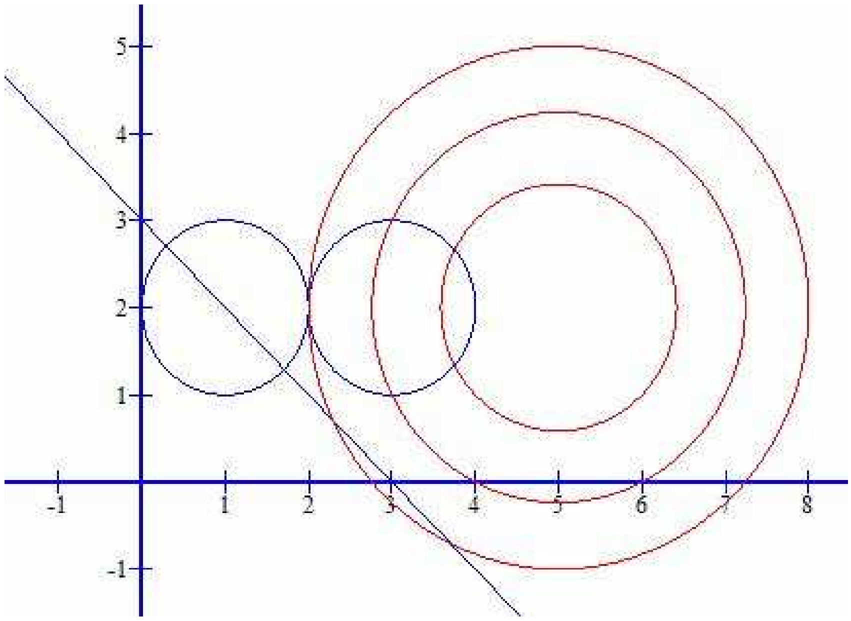
Y de aquí se obtiene:

$$\mu_1 = 3 \ >0$$

¡Cumple KKT!

Como la región factible y la función objetivo f son claramente convexas, (2,2) es óptimo y f=9.

5. Si agregamos la restricción, el gráfico queda de la siguiente forma:



donde el punto óptimo sigue siendo el (2,2), aunque ahora la región factible está formada por un único punto (el (2,2), intersección de ambas restricciones circulares). Como ya probamos que éste punto cumple la condición necesaria de KKT anteriormente, y como la región factible sigue siendo convexa, se cumple KKT

(No hace falta hacer los cálculos si argumentan bien ;).

Problema 3:

Variables:

$$Z_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{Si está instalada la planta de malta en la ubicación j en el año t} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$X_{ijt} =$ Toneladas de cebada transportadas desde la plantación i a la planta j en el año t.

$Y_{jkt} =$ Toneladas de malta transportadas desde la plantación j al punto de demanda k en el año t.

Restricciones:

1) Satisfacer demanda:

$$\sum_j Y_{jkt} \geq D_{kt} \qquad \forall k, t$$

2) Cebada necesaria para producir malta:

$$\sum_k Y_{jkt} \leq \sum_i r_i * X_{ijt} \qquad \forall j, t$$

3) Capacidad de las plantas:

$$\sum_k Y_{jkt} \leq C_j \qquad \forall j \in J_A, t$$

$$\sum_k Y_{jkt} \leq C_j * Z_{jt} \qquad \forall j \in J \setminus J_A, t$$

4) Abrir la planta una sola vez:

$$Z_{jt} \leq Z_{jt+1} \qquad \forall j \in J \setminus J_A, t < T$$

5) Capacidad de producción de cebada:

$$\sum_j X_{ijt} \leq A_{it} \qquad \forall i, t$$

6) Una planta de malta por año como máximo:

$$\sum_{j \in J \setminus J_A} (Z_{jt} - Z_{jt-1}) \leq 1 \qquad \forall t$$

7) Cebada importada proporcional a malta exportada:

$$0{,}8*\sum_j Y_{j1t} \leq \sum_j X_{1jt} \leq 1{,}2*\sum_j Y_{j1t} \qquad \forall j,t$$

8) Condición de borde:

$$Z_{j0} = 0 \qquad \forall j \in J \setminus J_A$$

9) Naturaleza variables:

$$X_{ijt} \in \Re, Y_{jkt} \in \Re \ , Z_{jt} \in \{0,1\} \qquad \forall i, j, t$$

<u>Fn. Objetivo</u>:

$$\min\{\sum_{i,j,t} a_{ijt} * X_{ijt} + \sum_{j,k,t} m_{jkt} * Y_{jkt} + \sum_{t,j \in J \setminus J_A} s_{jt} * (Z_{jt} - Z_{jt-1})\}$$

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl