

**IN34A – Optimización
CTP N°2
6 de Mayo, 2009**

Sea el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a: } 3x_1 + 4x_2 &\leq 20 & (1) \\ x_1 - x_2 &\leq 3 & (2) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. (1 pto.) Grafique el problema, especificando claramente las restricciones, función objetivo y área factible. Calcule z .
2. (3 pts.) Resuelva el problema utilizando SIMPLEX matricial, comenzando desde el punto que estime conveniente¹.
3. (1 pto.) Suponga que se agrega una tercera restricción al problema:

$$x_1 + x_2 \geq 2 \quad (3)$$

Muestre gráficamente por qué no es posible usar el origen como base inicial. ¿Qué se debe hacer en este caso? (sólo indique, no resuelva).

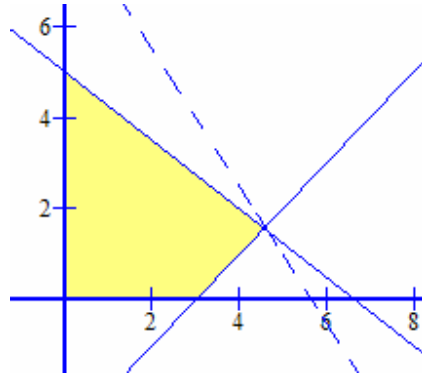
4. (1 pto.) Formule el problema dual del problema original.

¹ Considere:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Solución:

1) El gráfico del problema se muestra a continuación:



El punto óptimo es $(32/7, 11/7)$.
 $z = 16,85$.

2) **NOTA:** Podían partir desde cualquier punto. En esta pauta partimos del origen. Primero se debe llevar el problema a la forma estándar

$$\begin{aligned} \min -z &= -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a: } 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 20 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Comenzamos desde el origen, por lo que las variables no básicas son x_1 y x_2 . Las variables básicas son x_3 y x_4 . Con lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{R} = B^{-1} * R = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ b &= \begin{bmatrix} 20 \\ 3 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{b} = B^{-1} * b = \begin{bmatrix} 20 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\begin{aligned} \bar{C}_r &= [-3 \quad -2] - [0 \quad 0] * \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \bar{C}_r = [-3 \quad -2] \end{aligned}$$

No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos negativos.

Criterio de entrada a la base: Entra la variable con menores costos reducidos, entonces entra X_1

Criterio de salida de la base: $\min_{ais} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{a_{is}} \right\} = \left\{ \frac{20}{3}, \frac{3}{1} \right\} \Rightarrow \text{Sale } X_4$

Con esto, las nuevas variables básicas son X_3 y X_1 y las no básicas X_4 y X_2

Ahora iteramos:

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R &= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{R} = B^{-1} * R = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ b &= \begin{bmatrix} 20 \\ 3 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{b} = B^{-1} * b = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\begin{aligned} \bar{Cr} &= [0 \quad -2] - [0 \quad -3] * \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \bar{Cr} = [3 \quad -5] \end{aligned}$$

No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos negativos.

Criterio de entrada a la base: Entra la variable con menores costos reducidos, entonces entra X_2

Criterio de salida de la base: $\min_{ais} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{a_{is}} \right\} = \left\{ \frac{11}{7} \right\} \Rightarrow \text{Sale } X_3$ (notar que el término $3/-1$ no

se puso, ya que $-1 < 0$ y sólo deben considerarse los $a_{is} \geq 0$)

Con esto, las nuevas variables básicas son X_2 y X_1 y las no básicas X_4 y X_3

Iteramos nuevamente:

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & -3/7 \\ 1/7 & 4/7 \end{bmatrix} \\
 R &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{R} = B^{-1} * R = \begin{bmatrix} -3/7 & 1/7 \\ 4/7 & 1/7 \end{bmatrix} \\
 b &= \begin{bmatrix} 20 \\ 3 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \bar{b} = B^{-1} * b = \begin{bmatrix} 11/7 \\ 32/7 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

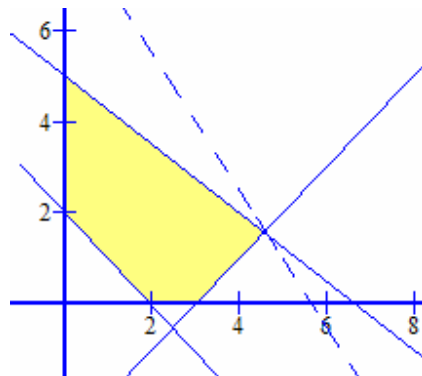
Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_r &= [0 \quad 0] - [-2 \quad -3] * \begin{bmatrix} -3/7 & 1/7 \\ 4/7 & 1/7 \end{bmatrix} \\
 &\Rightarrow \bar{C}_r = [6/7 \quad 5/7]
 \end{aligned}$$

Como ambos costos reducidos son positivos, estamos en el óptimo.

Por lo tanto, el punto óptimo es $X_1 = 32/7$, $X_2 = 11/7$ y con esto $Z = 16,85$.

3) El nuevo gráfico será:



donde claramente se puede ver que el punto (0,0) no es factible, por lo que el origen no será una base factible inicial. En este caso se debe utilizar Fase I de Simplex. Cuando se encuentra el valor óptimo de este problema (que debe ser 0), se toma aquella base óptima como la base factible inicial para comenzar a iterar.

4)

$$\begin{aligned} \min w &= 20y_1 + 3y_2 \\ \text{s.a: } 3y_1 + 1y_2 &\geq 3 \\ 4y_1 - y_2 &\geq 2 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl