INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Guillermo Durán, Richard Weber

Auxiliares: Fernanda Bravo. André Carboni, Rodrigo Wolf

IN34A – Optimización
29 de Abril, 2009

Problema 1

Sea el siguiente problema (P) de programación lineal:

$$
\begin{aligned}
(P)\ Max \quad & z = x_1 + x_2 \\
s.a. \quad & \\
& 2x_2 - 3x_1 \leq 6 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Utilizando fase 1 de Simplex encuentre una base primal factible. Indique explícitamente la matriz básica (o las variables que la componen) en cada iteración.

(b) A partir de la base encontrada en (a) desarrolle fase 2 de Simplex. Indique explícitamente la matriz básica (o las variables que la componen) en cada iteración. ¿Qué sucede? Fundamente su conclusión a través de Simplex.

Problema 2

Sea el problema:

$$
\begin{aligned}
\max z = (10 - 4\theta)x_1 + (4 - \theta)x_2 + (7 + \theta)x_3 \\
\text{s.a.} \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 7 \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 5 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Donde θ puede tomar cualquier valor positivo o negativo.
Sean x_4 y x_5 las variables de holgura para las restricciones respectivas. Para $\theta = 0$, se sabe que las variables básicas en el óptimo son x_1 y x_2. Con esta información responda:

1. Aplicar el algoritmo SIMPLEX para encontrar el óptimo para $\theta = 0$.

2. Determine el intervalo de valores de θ para que la solución básica factible anterior siga siendo óptima.

3. Determine el mejor valor de θ dentro de este intervalo.

4. Dado que θ se encuentra en el intervalo encontrado en 2, encuentre el intervalo de $b1$ y $b2$ de forma independiente para que la base factible óptima anterior siga siendo la misma.

5. Dado que θ se encuentra en el intervalo encontrado en 2, encuentre el intervalo de $b1$ y $b2$ de forma dependiente uno del otro para que la base factible óptima anterior siga siendo la misma.

6. escriba el problema del problema original

Problema 3

Escriba El dual del siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad x_2 \\
&s.a. \\
&-x_1 + x_2 \leq 2 \\
&2x_1 + x_2 \leq 4 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Solución

Problema 1

a)

Transformamos el problema a la forma canónica y agregamos variables artificiales:

$$
\begin{array}{l}
Min \quad t_1 + t_2 \\
s.a. \\
-3x_1 + 2x_2 + x_3 + t_1 = 6 \\
x_2 - x_4 + t_2 = 2 \\
x_i \geq 0, t_j \geq 0 \quad \forall i = 1 \ldots 4, j = 1,2
\end{array}
$$

Comenzamos a iterar, la base inicial está asociada a las variables artificiales,

FASE I

<u>Iteración 1:</u>

$$B_1 = I_2 \;\; R_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \; \overline{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overline{A}_1 = R_1$$

$$\overline{c}_r^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{entra } \mathrm{x}_2$$

$$\min \left\{ \frac{6}{2} \quad \frac{2}{1} \right\} = 2 \Rightarrow \text{sale } \mathrm{t}_2$$

<u>Iteración 2:</u>

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \overline{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overline{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c}_r^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{entra } \mathrm{x}_4$$

$$\min \left\{ \frac{2}{2} \right\} = 1 \Rightarrow \text{sale } \mathrm{t}_1$$

<u>Iteración 3:</u>

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \; R_3 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \overline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overline{A}_3 = \begin{bmatrix} -1.5 & -1.5 & 0.5 & 0.5 \\ -1.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c}_r^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

Terminamos fase 1, la base primal factible es B_3, asociada a x_4 y x_2.

b)

FASE 2

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \; R_1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \overline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overline{A}_1 = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 \\ -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c}_r^T = \begin{pmatrix} -1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{entra } \mathrm{x}_1$$

Pero $\overline{a}_{i1} < 0 \; \forall i = 1,2$.

Todos los coeficientes de x_1 en las restricciones son <= 0

x_1 puede crecer indefinidamente. **Problema no acotado.**

Problema 2

1)

Hay que llevar el problema a la forma estándar min = -{(10 - 4θ)x_1 + (4 - θ)x_2 + (7 + θ)x_3}

s.a. $3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 5$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

(lo importante es que se den cuenta que tiene que usar menos los coeficientes de la función objetivo con eso basta)

Vamos a partir con B = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (se pudo empezar con otra base, pero esta es la que más conviene).

Luego

$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

Para ver si estamos en el optimo hay que revisar la condición de optimalidad:

$$\overline{C}r \geq 0 \Leftrightarrow (-7-\vartheta \quad 0 \quad 0) - (-10+4\theta \quad -4+\theta \quad)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\overline{C}r \geq 0 \Leftrightarrow (-7-\vartheta \quad 0 \quad 0) - (-10+4\theta \quad -4+\theta \quad)\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (13-2\theta \quad 2-2\theta \quad 2+\theta) \geq 0$$

Hacemos θ=0 y tenemos

$\Leftrightarrow (13 \quad 2 \quad 2) \geq 0$ por lo tanto el optimo esta formado por la base de x1 y x2, las que toman el valor:

$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$ (todos los otros x valen cero)

2)

Para que la solución sea optima se debe cumplir que los costos reducidos son mayores o iguales a cero, luego:

$$\Leftrightarrow (13-2\theta \quad 2-2\theta \quad 2+\theta) \geq 0 \Rightarrow 13/2 \geq \theta, 1 \geq \theta, \theta \geq -2 \Rightarrow \theta \in [-2 \quad 1]$$

3)

El mejor valor es el que haga más grande (10 - 4θ)x_1 + (4 - θ)x_2 + (7 + θ)x_3, reemplazando los valores de los x:

(10 - 4θ)*2* + (4 - θ)*1*=24-9θ, por lo que el valor que mas nos sirve es el más negativo del intervalo encontrado y dicho valor es -2

4)

Necesitamos mantener siempre: $B^{-1}b \geq 0$

Luego

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} b1 \\ 5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b1 - 5 \geq 0 \wedge -2b1 + 15 \geq 0 \Rightarrow b1 \in [5 \quad 7.5]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ b2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 7 - b2 \geq 0 \wedge -14 + 3b2 \geq 0 \Rightarrow b2 \in \begin{bmatrix} 14/3 & 7 \end{bmatrix}$$

5)

Se debe cumplir lo mismo que arriba luego:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b1 - b2 \geq 0 \wedge -2b1 + 3b2 \geq 0 \Rightarrow b1 \in \begin{bmatrix} b2 & (3/2)b2 \end{bmatrix} \wedge b2 \in \begin{bmatrix} (2/3)b1 & b1 \end{bmatrix}$$

6)

$$\begin{aligned} &\text{Min } 7y1 + 5y2 \\ &\text{s.a. } 3y1 + 2y2 \geq (10 - 4\theta) \\ &y1 + y2 \geq (4 - \theta) \\ &2y1 + 3y2 \geq (7 + \theta) \\ &y1, y2 \geq 0 \end{aligned}$$

Problema 3

$$\begin{aligned} &\text{mín} \quad 2y_1 + 4y_2 \\ &s.a. \\ &-y_1 + 2y_2 \geq 0 \\ &y_1 + y_2 \geq 1 \\ &y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$