Profesores: Guillermo Durán, Richard Weber

Auxiliares: Fernanda Bravo. André Carboni, Rodrigo Wolf

IN34A – Optimización
Auxiliar N°4
22 de Abril, 2009

Problema 1

Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lll} (P) & \max & z = 2X_2 - X_1 \\ & s.a & 5X_2 - 3X_1 \leq 15 \\ & & 4X_2 - X_1 \leq 20 \\ & & 4X_2 + 7X_1 \leq 84 \\ & & X_1, X_2 \geq 0 \end{array}$$

Resuelva utilizando Simplex matricial comenzando en el origen. Indique en el gráfico lo que está sucediendo en cada iteración (interpretando variables básicas y no básicas).

Problema 2

Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lll} (P) & \max & z = 4X_1 + 6X_2 \\ & s.a & 2X_1 + 3X_2 \leq 9 \\ & & -X_1 + X_2 \leq 0 \\ & & X_2 \leq 2 \\ & & X_1, X_2 \geq 0 \end{array}$$

Resolver utilizando Simplex matricial, comenzando en el origen.

Problema 3

a) ¿Cómo determina el algoritmo Simplex si el vértice actual es una solución óptima del problema?
b) Si el vértice actual es óptimo, ¿Cómo se puede determinar a través del algoritmo si hay más de un óptimo?
c) ¿Cómo determina el algoritmo Simplex si el problema es no acotado?
d) ¿Cuándo se dice que una solución básica es degenerada?
e) Explique cómo el algoritmo Simplex asegura no salirse del espacio de soluciones factibles al efectuar una iteración.
f) Señale si el algoritmo Simplex asegura en cada iteración la máxima variación posible de la función objetivo. ¿Por qué? Si no lo asegura, explique como se podría lograr la máxima variación.
g) ¿Puede suceder que en un PL de minimización exista algún costo reducido negativo, pero que en esa iteración del Simplex la función objetivo no pueda ser mejorada?

Solución

Problema 1

Primero se lleva al problema a la forma estándar:

$$
\begin{array}{lll}
(P^*) & \min & -2X_2 + X_1 \\
 & \text{s.a.} & 5X_2 - 3X_1 + X_3 = 15 \\
 & & 4X_2 - X_1 + X_4 = 20 \\
 & & 4X_2 + 7X_1 + X_5 = 84 \\
 & & X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0
\end{array}
$$

Comenzamos del origen, por lo que las variables no básicas son X_1 y X_2. Las variables básicas son X_3, X_4 y X_5. Con lo anterior se tiene que:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{R} = B^{-1} \cdot R = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 84 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 84 \end{pmatrix}$$

Vemos si el punto de partida es óptimo analizando los costos reducidos:

$$\overline{c_R} = c_R - c_B \cdot \overline{R} = (1 \quad -2) - (0 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{c_R} = (1 \quad -2)$$

$\Rightarrow$ No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos menores que cero.

Criterio de entrada a la base: Entra aquel con menores costos reducidos $\Rightarrow$ entra X_2.

Criterio de salida de la base: $\min\limits_{\overline{a_{is}} \geq 0} \left\{ \dfrac{\overline{b_i}}{\overline{a_{is}}} \right\} = \min \left\{ \dfrac{15}{5} \quad \dfrac{20}{4} \quad \dfrac{84}{4} \right\} \Rightarrow$ sale X_3.

Esto implica que las nuevas variables no básicas son X_1 y X_3. Las variables básicas son X_2, X_4 y X_5. Con lo anterior se tiene que:

$$B=\begin{pmatrix}5&0&0\\4&1&0\\4&0&1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}1/5&0&0\\-4/5&1&0\\-4/5&0&1\end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}-3&1\\-1&0\\7&0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overline{R}=B^{-1}\cdot R=\begin{pmatrix}-3/5&1/5\\7/5&-4/5\\47/5&0\end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix}15\\20\\84\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overline{b}=B^{-1}\cdot b=\begin{pmatrix}3\\8\\81\end{pmatrix}$$

Vemos si el punto es óptimo analizando los costos reducidos:

$$\overline{c_R}=c_R-c_B\cdot\overline{R}=(1\quad 0)-(-2\quad 0\quad 0)\cdot\begin{pmatrix}-3/5&1/5\\7/5&-4/5\\47/5&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \overline{c_R}=(-1/5\quad 2/5)$$

$\Rightarrow$ No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos menores que cero.

Criterio de entrada a la base: Entra aquel con menores costos reducidos $\Rightarrow$ entra X_1.

Criterio de salida de la base: $\min\limits_{\overline{a_{is}}\geq 0}\left\{\dfrac{\overline{b_i}}{\overline{a_{is}}}\right\}=\min\left\{\dfrac{40}{7}\quad\dfrac{405}{47}\right\}\Rightarrow$ sale X_4.

Esto implica que las nuevas variables no básicas son X_4 y X_3. Las variables básicas son X_2, X_1 y X_5. Con lo anterior se tiene que:

$$B=\begin{pmatrix}5&-3&0\\4&-1&0\\4&7&1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}1/7&3/7&0\\-4/7&5/7&0\\32/7&-47/7&1\end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overline{R}=B^{-1}\cdot R=\begin{pmatrix}3/7&-1/7\\5/7&-4/7\\-47/7&32/7\end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix}15\\20\\84\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overline{b}=B^{-1}\cdot b=\begin{pmatrix}45/7\\40/7\\128/7\end{pmatrix}$$

Vemos si el punto es óptimo analizando los costos reducidos:

$$\overline{c_R} = c_R - c_B \cdot \overline{R} = (0 \quad 0) - (-2 \quad 1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 5/7 & -4/7 \\ -47/7 & 32/7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{c_R} = (1/7 \quad 2/7)$$

$\Rightarrow$ Estamos en el óptimo.

Este es: $X_1 = 40/7$, $X_2 = 45/7$ y el valor de la función objetivo es $z = 50/7$

Lo importante a indicar gráficamente es que comienzan en el punto (0,0), se mueven al (0,3) y luego terminan en el ($40/7, 45/7$). Estos valores los determinan las variables básicas y no básicas. Cuando una variable artificial sale de la base, quiere decir que se hace cero, y por tanto la restricción asociada a esa variable básica es activa y nos encontramos en el punto donde lo es.

Problema 2

Nota inicial: *En ejercicio estaba bueno, el problema en la auxiliar fue que no nos fijamos que era necesaria efectivamente una iteración adicional para verificar que el punto al que llegamos era el óptimo. Son 3 iteraciones: en la primera nos quedamos en el origen (por ser punto degenerado), en la segunda nos movemos al punto "de arriba" y en la tercera al calcular los costos reducidos llegamos a que el punto es el óptimo.*

Primero se lleva al problema a la forma estándar:

$$\begin{aligned} (P^*) \text{ min} \quad & -4X_1 - 6X_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2X_1 + 3X_2 + X_3 = 9 \\ & -X_1 + X_2 + X_4 = 0 \\ & X_2 + X_5 = 2 \\ & X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, tomemos como base a la identidad.

$$\overline{b} = B^{-1}b = I\begin{pmatrix}9\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\0\\2\end{pmatrix} \geq 0$$

$$\overline{R} = B^{-1}R = I\,R\ ;\ R = \begin{array}{cc} x1 & x2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}}\end{array}$$

$$\overline{Cr} = Cr - C_B\overline{R} = (-4,-6) - (0,0,0)\ \overline{R} = (-4,-6) \leq 0$$

Por lo que entra x2 a la base, ya que -6 es el menor costo reducido, y -6 esta asociado a x2

Veamos ahora que variable sale

$$\text{Min } \{\overset{x3}{\frac{9}{3}}, \overset{x4}{\frac{0}{1}}, \overset{x5}{\frac{2}{1}}\} = 0 \rightarrow \text{ x4 sale}$$

Luego

$$B = \begin{array}{ccc} x3 & x2 & x5 \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}}\end{array} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$R = \begin{array}{cc} x1 & x4 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix}2 & 0\\-1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}}\end{array} \rightarrow \overline{R} = B^{-1}R = \begin{bmatrix}5 & -3\\-1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\overline{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}9\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\0\\2\end{pmatrix} \geq 0$$

$$\overline{Cr} = Cr - C_B\overline{R} = (-4, 0) - (0, -6, 0)\begin{bmatrix}5 & -3\\-1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = (-10,6) \leq 0 \quad \text{por lo que entra x1}$$

Utilicemos ahora el criterio de salida

$$\text{Min } \{\frac{9}{5}, \frac{2}{1}\} = \frac{9}{5} \rightarrow \text{x3 sale de la base}$$

OJO : $\frac{0}{-1}$ no se considero porque el criterio de entrada nos dice que solo tomemos en cuenta los valores $\overline{ais} \geq 0$ y claramente -1 es menor que cero

Así llegamos a:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x1 & x2 & x5 \end{array} \\ B = & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 0 \\ -1/5 & -2/5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x3 & x4 \end{array} \\ R = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \overline{R} = B^{-1}R = \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$$

$$\overline{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 0 \\ -1/5 & -2/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/5 \\ 9/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\overline{Cr} = Cr - C_B \overline{R} = (0,0) - (-4, -6, 0) \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{bmatrix} = (2, 0) \geq 0$$

Luego $\overline{b} = \begin{pmatrix} 9/5 \\ 9/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x3 \\ x4 \end{pmatrix}$

Por su parte la función objetivo evaluada en el punto optimo vale $z = 4 \cdot \frac{9}{5} + 6 \cdot \frac{9}{5} = 18$

Problema 3

a) Un vértice será óptimo si todos los costos reducidos son mayores o iguales a cero.

b) Si en el óptimo existe al menos una variable no básica con costo reducido igual a cero, entonces el problema admite óptimos alternativos.

c) Si la variable que sale de la base es x_s, entonces el problema es no acotado si $\overline{a}_{is} < 0 \quad \forall i = 1,\ldots,m$, ya que x_s podría crecer indefinidamente.

d) Si el vértice está sobredeterminado tenemos solución degenerada. Si rg(A) = n, un vértice esta sobredeterminado si es fruto de la intersección de n' > n restricciones. Esta condición se verifica si existe al menos una variable básica x_B igual a cero.

e) El Algoritmo Simplex asegura no salirse del espacio de soluciones factibles al efectuar cada iteración respetando el criterio de salida de la base.
En efecto, si se tiene que la variable que entra a la base es x_s, para saber cual es la variable que sale de la base es necesario determinar cual es la variable que primero se anula cuando x_s crece, para no salirse del espacio factible. Esto es buscar la primera variable que se anula en cada una de las restricciones del problema en su forma canónica:

$$x_i + \overline{a}_{is} \cdot x_s = \overline{b}_i \quad \forall i = 1,\ldots,m$$

Tomando en consideración las m restricciones el máximo valor que puede tomar x_s es:

$$\underset{\overline{a}_{is}>0}{mín}\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}}\right\}$$

f) El criterio de entrada a la base indica que la variable no básica que entra es aquella que tiene el menor costo reducido, dentro de aquellos que son < 0. Se ha adoptado esta convención porque trae el mayor mejoramiento local. Sin embargo al escoger esta variable de entrada se esta automáticamente determinando cual será la variable básica que saldría de la base, y puede darse el caso que esta variable aportaba a la minimización de la función objetivo. Entonces para lograr la máxima variación habría que escoger como variable de entrada aquella que en conjunto con la variable que saldría impliquen la mayor variación en la función objetivo. Para esto es necesario probar todos los casos.

g) Si, si estamos por primera vez en una solución básica factible degenerada no optima algún costo reducido será menor que cero, sin embargo, al aplicar los criterios de entrada/salida a la base será posible obtener otra base representativa del mismo vértice (porque es degenerado), y en ese caso el valor de la función objetivo no cambiara (ya que se evalúa en el mismo punto).

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl