INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Guillermo Durán, Richard Weber

Auxiliares: André Carboni, Fernanda Bravo, Rodrigo Wolf

IN34A – Optimización
Auxiliar N°3
8 de Abril, 2009

Problema 1:

Sea el siguiente problema de minimización:

$$\begin{aligned}
\min\ & f(x_1;x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \qquad \text{(P)}\\
\text{s.a}\ & g_1(x_1;x_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1\\
& g_2(x_1;x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\\
& x_1 \geq 0\\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

a. Desarrolle las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para el problema (P).
b. Revise el cumplimiento de las condiciones KKT para los siguientes puntos: (0,0); (2, 0); (0,2)
c. Qué podemos concluir para cada uno de estos puntos?
d. Muestre las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo gráficamente
e. Determine un candidato para ser solución óptima analizando el grafico. Verifique si este candidato cumple con las condiciones de KKT.
f. Dé la solución optima y el valor de la función objetivo asociado.

Problema 2:

Sea el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned}
\max\ & x_1 - 2x_2\\
\text{s.a.}\ & 5x_1 - 2x_2 \leq 3\\
& x_1 + x_2 \geq 1\\
& -3x_1 + x_2 \leq 3\\
& x_1 - 2x_2 \geq -3\\
& x_1 \geq 0\\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

a. Grafique el problema y postule 4 puntos como posibles óptimos del problema.
b. Pruebe las condiciones necesarias y suficientes de KKT en los puntos escogidos y concluya acerca de los resultados obtenidos.
c. Muestre para el punto óptimo, el cono formado por los gradientes de las restricciones activas. ¿Qué condición debe cumplir el gradiente de la función objetivo?

<u>Solución</u>:

Problema 1:

a) Primero se lleva el problema a la forma estándar

$$\begin{array}{lll} \min f(x_1;x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 & & (P') \\ \text{s.a} \quad g_1 : (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 & & \\ \qquad g_2 : x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \leq 0 & & \\ \qquad g3 : -x_1 \leq 0 & & \\ \qquad g4 : -x_2 \leq 0 & & \end{array}$$

Ahora calculamos los gradientes de f y g_i

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2*(x_1-4) \\ 2*(x_2-4) \end{pmatrix} \; ; \; \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2*(x_1-1) \\ 2*x_2 \end{pmatrix} \; ; \; \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2*x_1 \\ 2*(x_2-1) \end{pmatrix} \; ; \; \nabla g_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \nabla g_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así, se tiene que las condiciones de KKT son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 2*(x_1-4) \\ 2*(x_2-4) \end{pmatrix} + \mu_1 * \begin{pmatrix} 2*(x_1-1) \\ 2*x_2 \end{pmatrix} + \mu_2 * \begin{pmatrix} 2*x_1 \\ 2*(x_2-1) \end{pmatrix} + \mu_3 * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_4 * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

y

$$\begin{aligned} &\mu_1 * \ ((x_1-1)^2 + x_2^{\ 2} - 1) = 0 \\ &\mu_2 * ((x_1^{\ 2} + (x_2-1)^2 - 1) = 0 \\ &\mu_3 * (-x_1) = 0 \\ &\mu_4 * (-x_2) = 0 \end{aligned}$$

b) <u>Punto (0,0):</u>

$$\begin{aligned} &\mu_1 * \ ((0-1)^2 + 0^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 \in \Re \\ &\mu_2 * ((0^2 + (0-1)^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_2 \in \Re \\ &\mu_3 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_3 \in \Re \\ &\mu_4 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_4 \in \Re \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} 2*(0-4) \\ 2*(0-4) \end{pmatrix} + \mu_1 * \begin{pmatrix} 2*(0-1) \\ 2*0 \end{pmatrix} + \mu_2 * \begin{pmatrix} 2*0 \\ 2*(0-1) \end{pmatrix} + \mu_3 * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_4 * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu_1 * \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 * \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu_3 * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_4 * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Pero notemos que $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes, al igual que $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, por lo que basta con:

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu_3 * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_4 * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

De donde

$$\mu_3 = -8 < 0$$
$$\mu_4 = -8 < 0$$

Como son menores que 0, no cumplen KKT.

<u>Forma alternativa:</u> Para los que quedaron con dudas sobre esto en la auxiliar, hay otra forma de abordar el problema.

Habíamos llegado a que:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu_1 * \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 * \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu_3 * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_4 * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Entonces, sacando factor común:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} + (\mu_1 + 2\mu_3) * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (2\mu_2 + \mu_4) * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

De aquí obtenemos 2 sistemas de ecuaciones, de donde:

$$-8 = \mu_1 + 2\mu_3$$
$$-8 = 2\mu_2 + \mu_4$$

Notando que para cada ecuación, al menos uno de los μ debe ser negativo, concluimos que no se cumple KKT (ya que no son todos mayores o iguales a cero).

<u>Punto (2,0):</u>

$$\mu_1 * \ ((2-1)^2 + 0^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 \in \Re$$
$$\mu_2 * ((2^2 + (0-1)^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 * 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_2 = 0$$
$$\mu_3 * (-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_3 = 0$$
$$\mu_4 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_4 \in \Re$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu_1 * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_4 * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

De donde

$$\mu_1 = 2$$
$$\mu_4 = -8 < 0$$

Como $\mu_4 < 0$ entonces no cumple KKT.

<u>Punto (0,2):</u>

$$\begin{aligned}
&\mu_1 * \ ((0-1)^2 + 2^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 * 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = 0 \\
&\mu_2 * ((0^2 + (2-1)^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_2 \in \Re \\
&\mu_3 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_3 \in \Re \\
&\mu_4 * (-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_4 = 0
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu_2 * \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_3 * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

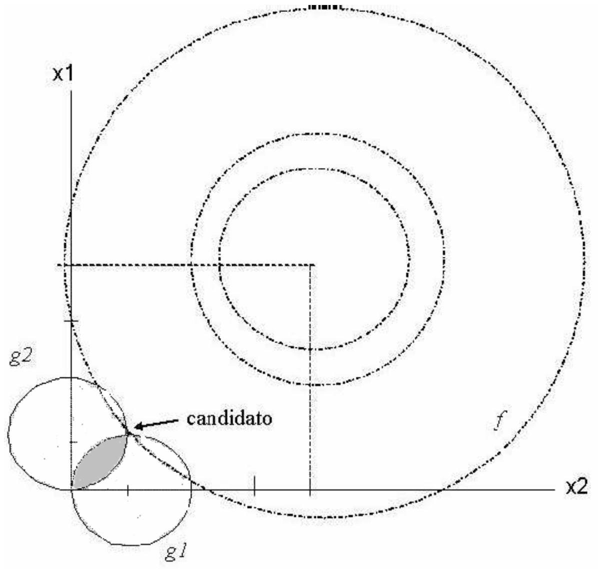
De donde

$$\mu_2 = 2$$
$$\mu_3 = -8 < 0$$

Como $\mu_3 < 0$ entonces no cumple KKT.

c) (0,0) Es un punto en el extremo del poliedro factible que no cumple KKT, como la región es convexa, quiere decir que (0,0) no es óptimo del problema. Se puede observar que, moviéndose en cualquier punto al interior de la región factible, la función objetivo mejora.
(2,0) Es un punto que no cumple KKT lo que indica que este punto tiene alguna característica particular, en este caso, esto sucede porque no se encuentra dentro del poliedro factible.
(0,2) Es un punto que no cumple lo que indica que este punto tiene alguna característica particular, en este caso, esto sucede porque no se encuentra dentro del poliedro factible.

d)



e) El candidato para se solución óptima se encuentra en la intersección entre ambas restricciones más cercanas al (4,4).
Utilizando entonces g_1 y g_2 (restricciones activas) para obtener el punto (x_1,x_2) correspondiente, llegamos a que el candidato a óptimo es el (1,1).

¿Cumple KKT?

$$\mu_1 * \ ((1-1)^2 + 1^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 \in \Re$$
$$\mu_2 * ((1^2 + (1-1)^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_2 \in \Re$$
$$\mu_3 * 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_3 = 0$$
$$\mu_4 * 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_4 = 0$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu_1 * \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_4 * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

De donde

$$\mu_1 = 3$$
$$\mu_4 = 3$$

Como ambos son positivos, ¡entonces se cumple KKT! **:)**

f) La solución óptima es el valor encontrado en la parte e) ya que, como se observa gráficamente, la región es convexa, pues los puntos que conforman la línea que une a cualquier par de puntos dentro de la región pertenecen a ella.
Así como la región es convexa, también lo son las restricciones asociadas y función objetivo asociadas. Luego el punto óptima es:

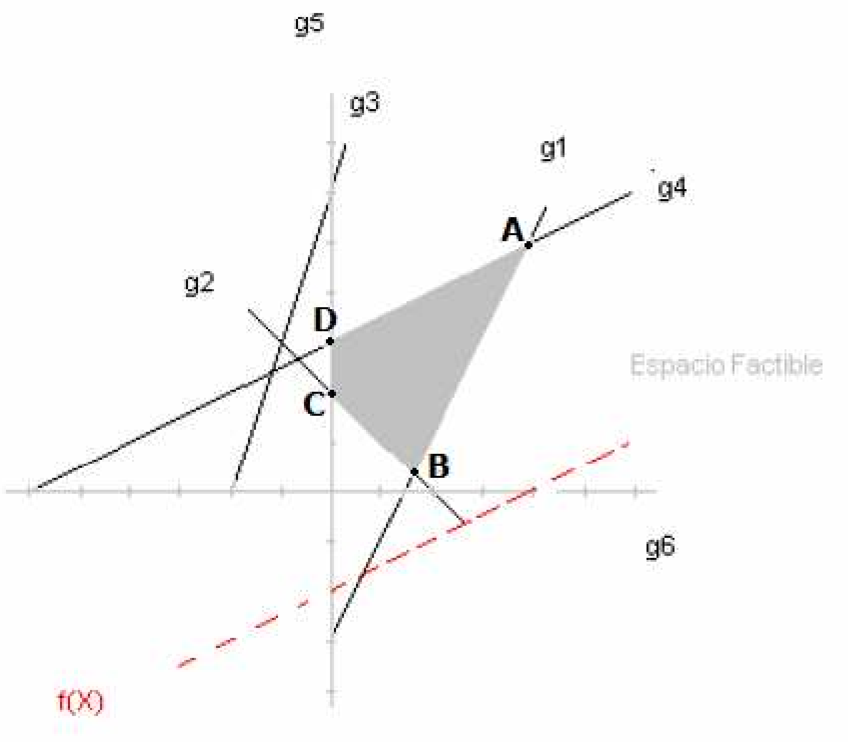
$$(x_1,x_2)=(1,1)$$

Y la función objetivo:

$$f(1,1)= 9 + 9 = 18$$

Problema 2:

a)



Las 4 esquinas del poliedro factible son candidatos a óptimo (puntos A,B, C y D).

Punto A:
Se activan las restricciones g1 y g4
A = (3/2,9/4)

Punto B
Se activan las restricciones g1 y g2
B = (5/7,2/7)

Punto C
Se activan las restricciones g2 y g5
C = (0,1)

Punto D
Se activan las restricciones g4 y g5
D = (0,3/2)

b) Primero llevamos el problema a su forma estándar:

$$
\begin{aligned}
&\min f = -x_1 + 2x_2 \\
&\text{s.a.} \quad g_1 : 5x_1 - 2x_2 - 3 \leq 0 \\
&\qquad\quad g_2 : 1 - x_1 - x_2 \leq 0 \\
&\qquad\quad g_3 : -3x_1 + x_2 - 3 \leq 0 \\
&\qquad\quad g_4 : -x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0 \\
&\qquad\quad g_5 : -x_1 \leq 0 \\
&\qquad\quad g_6 : -x_2 \leq 0
\end{aligned}
$$

Ahora calculamos los gradientes de f y g_i

$$\nabla f=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \;;\; \nabla g_1=\begin{pmatrix}5\\-2_2\end{pmatrix} \;;\; \nabla g_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \;;\; \nabla g_3=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} \;;\; \nabla g_4=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \;;\; \nabla g_5=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \;;\; \nabla g_6=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

<u>Punto A = (3/2,9/4):</u>

Restricciones 1 y 4 activas, entonces:

$$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+\mu_1*\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}+\mu_4*\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=0$$

Y de aquí

$$\mu_1 = 0$$
$$\mu_4 = -1 < 0$$

Como μ_4 < 0 entonces no cumple KKT.

<u>Punto B = (5/7,2/7):</u>

Restricciones 1 y 2 activas, entonces:

$$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+\mu_1*\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}+\mu_2*\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=0$$

Y de aquí

$$\mu_1 = 3/7$$
$$\mu_2 = 8/7$$

¡Cumple KKT!

<u>Punto C = (0,1):</u>

Restricciones 2 y 5 activas, entonces:

$$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+\mu_2*\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}+\mu_5*\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=0$$

Y de aquí

$$\mu_2 = 2$$
$$\mu_5 = -3$$

Como μ_5 < 0 entonces no cumple KKT.

Punto D = (0,3/2):

Restricciones 4 y 5 activas, entonces:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_4 * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_5 * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Y de aquí

$$\mu_4 = -1$$
$$\mu_5 = 0$$

Como $\mu_4 < 0$ entonces no cumple KKT.

Así, B es nuestro único candidato y como f es convexa y las restricciones también son convexas, B es optimo global del problema

C) Gráficamente, el cono corresponde a todos los vectores que están entre ∇g_1 y ∇g_2 para el punto B. Si graficamos $-\nabla f$ en el mismo punto, podemos ver que a diferencia de los puntos A, C y D, ahora $-\nabla f$ sí pertenece al cono mencionado (la interpretación es que para disminuir la función objetivo en dicho punto, la única forma es ir en contra de las restricciones y como esto no se puede, estamos en el óptimo).
Nota: Que $-\nabla f$ (x*) esté en el cono formado por los gradientes de las restricciones activas evaluadas en x*, no es más que decir que el punto cumple KKT, ya que a fin de cuentas lo que KKT nos dice es que $-\nabla f$ (X*) es igual a una combinación líneal de los gradientes de las restricciones activas en el punto (con μi ≥0)

$$-\nabla f(X^*) = \sum \mu i \, \nabla gi(X^*) \quad \text{con } \mu i \geq 0$$

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl