INGENIERÍA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs: Guillermo Durán
Richard Weber
Auxs: Fernanda Bravo
André Carboni
Rodrigo Wolf

Auxiliar 1

18 de marzo 2009

Problema 1

La oficina técnica coordinadora de cultivos (OTCC), tiene a su cargo la administración de 3 parcelas. El rendimiento agrícola de cada parcela está limitado tanto por la cantidad de tierra cultivable como por la cantidad de agua asignada para regadío de la parcela por la comisión de aguas. Los datos proporcionados por este organismo son los siguientes:

Parcela	Tierra Cultivable [ha]	Asignación de agua [m^3]
1	400	600
2	600	800
3	300	375

Las especies disponibles para el cultivo son la remolacha, trigo y maravilla, pero el ministerio de agricultura ha establecido un número máximo de hectáreas que pueden dedicarse a cada uno de estos cultivos en las 3 parcelas en conjunto, como lo muestra la siguiente tabla:

Especie	Consumo de Agua [m^3/ha]	Cuota Máxima [ha]	Ganancia Neta [$\$/ha$]
Remolacha	3	600	400
Trigo	2	500	300
Maravilla	1	325	100

Los dueños de las parcelas, en un acto de solidaridad social, han convenido que en cada parcela se sembrará la misma fracción de su tierra cultivable. Sin embargo, puede cultivarse cualquier combinación en cualquiera de las parcelas.
La tarea que encara la OTCC es plantear cuantas hectáreas se deben dedicar al cultivo de las distintas especies en cada parcela, de modo de maximizar la ganancia neta total para todas las parcelas a cargo de la OTCC.

Problema 2

Los auxiliares de un curso de optimización de una universidad de gran prestigio, han decidido, para hacer un bien a los alumnos de su facultad, abrir una agencia de citas.
La cantidad de inscritos en la agencia es de $M+N$ siendo M la cantidad de mujeres y N la cantidad de hombres. Se tiene, dadas las características demográficas de la facultad, que $N > M$.
Todos los inscritos se "ubican" entre ellos (solo de vista) y han informado confidencialmente a la agencia que la preferencia de una mujer m por emparejarse con un hombre n es de PM_{mn} y la preferencia de un hombre n por emparejarse con una mujer m es de PH_{mn} .
Adicionalmente a cada inscrito se le hace un test de personalidad y mediante un estudio, profundo y 100% certero, se determina si existirá compatibilidad entre cada combinación de parejas, obteniendo valores C_{mn} que serán 1 si la pareja del hombre n con la mujer m es compatible y 0 si la pareja no es compatible. Cada persona es compatible con al menos una pareja.

La agencia debe decidir a qué actividades enviar a cada pareja durante su cita (ej: ir al cine, a comer, etc.) para esto la agencia cuenta con una variedad de A actividades y con un presupuesto fijo dado por $PSPTO$ y se sabe que en cada actividad a la mujer m gastará G_{ma} dependiendo del nivel de gasto al que esté habituado la mujer y se sabe que un hombre gasta K_a si realiza la actividad a, este gasto es igual para todos los hombres. Se tiene además que cada pareja no puede realizar más de tres actividades en su cita.

La preferencia de un hombre n por hacer la actividad a está dada por SH_{na} y la preferencia de una mujer m por hacer la actividad a está dada por SM_{ma}.

Se sabe que una persona solo puede ser asignada una sola vez y que todas las mujeres deben tener pareja.

Los auxiliares del curso han decidido solicitar ayuda a sus alumnos pidiéndole a cada uno que formule un modelo de programación lineal entera para la primera ronda de citas, que maximice el nivel de satisfacción de preferencias.

Problema 3

La empresa de productos GOLOSO S.A. desea determinar su plan de producción y distribución para los próximos T días. Esta empresa posee K plantas productoras, en cada una de las cuales puede producirse N tipos de productos distintos. Una vez producidos, estos productos deben ser despachados inmediatamente a las bodegas de almacenamiento que se encuentran exactamente en el mismo lugar de la planta (en cada planta hay una bodega adyacente). Los productos son mantenidos en bodega hasta que son enviados a alguno de los I supermercados (centros de venta) disponibles y para ello tienen 2 posibilidades de vías de transporte las cuales difieren en costo y rapidez. Considere los siguientes elementos:

$K_{k,n}$: Capacidad diaria (en [kg]) de producción del producto n en la planta k.

F_n: Volumen (en [m^3]) ocupado por 1 [kg] de producto n.

M_k: Costo diario de Mantención (en [$\$/m^3$] de producto) de inventario en la bodega k.

B_n: Costo unitario (en [$]) de elaboración del producto n.

$D_{n,i}$: Demanda diaria (en [kg]) del producto n en el supermercado i.

H_k: Capacidad (en [m^3]) de la bodega asociada a la planta k.

$C_{i,j,k,t}$: Costo unitario de transporte (en [$\$/m^3$]) desde bodega k hacia el supermercado i por la vía de transporte j en el día t.

Para efectos del modelo, considere que el tiempo de transporte desde cualquier supermercado es de 1 día si se elige la vía de transporte 1 (j=1) y de 2 días si se elige la vía de transporte 2 (j=2). Además, suponga que cada bodega tiene un inventario inicial nulo para todos sus productos.

Formule un modelo de programación lineal que le permita a GOLOSO S.A. encontrar su plan de producción y distribución a mínimo costo satisfaciendo los requerimientos descritos.

INGENIERÍA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs: Guillermo Durán
Richard Weber
Auxs: Fernanda Bravo
André Carboni
Rodrigo Wolf

Pauta Auxiliar 1
18 de marzo 2009

Problema 1

1. Variables de Decisión
   x_i = Cantidad [ha] de remolacha a cultivar en la parcela i (i=1, 2, 3)
   y_i = Cantidad [ha] de trigo a cultivar en la parcela i (i=1, 2, 3)
   z_i = Cantidad [ha] de maravilla a cultivar en la parcela i (i=1, 2, 3)

2. Planteamiento de Restricciones

   a) Restricción de Tierra disponible por Parcela
   Parcela 1: $x_1 + y_1 + z_1 \leq 400$
   Parcela 2: $x_2 + y_2 + z_2 \leq 600$
   Parcela 3: $x_3 + y_3 + z_3 \leq 300$

   b) Restricción Disponibilidad de agua por parcela
   Parcela 1: $3x_1 + 2y_1 + 1z_1 \leq 600$
   Parcela 2: $3x_2 + 2y_2 + 1z_2 \leq 800$
   Parcela 3: $3x_3 + 2y_3 + 1z_3 \leq 375$

   c) Restricción de Cuota Máxima de cultivo por especie
   Remolacha: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 600$
   Trigo: $y_1 + y_2 + y_3 \leq 500$
   Maravilla 3: $z_1 + z_2 + z_3 \leq 325$

   d) Restricción de misma proporció de tierra cultivable
   Parcela 1= Parcela 2: $(x_1 + y_1 + z_1)/400 = (x_2 + y_2 + z_2)/600$
   Parcela 2= Parcela 3: $(x_2 + y_2 + z_2)/600 = (x_3 + y_3 + z_3)/300$
   Parcela 3= Parcela 1: $(x_3 + y_3 + z_3)/300 = (x_1 + y_1 + z_1)/400$

   e) La nunca bien ponderada restricción de no negatividad
   $x_i, y_i, z_i \geq 0$ i=1, 2, 3.

3. Planteamiento de la Función Objetivo
   $\max F = 400(x_1 + x_2 + x_3) + 300(y_1 + y_2 + y_3) + 100(z_1 + z_2 + z_3)$

Problema 2

Variables de decisión:

$$X_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{Si se asigna la pareja del hombre n y la mujer m} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$Y_{mna} = \begin{cases} 1 & \text{Si se asigna la actividad "a" a la pareja formada por el hombre n y la mujer m} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Restricciones:

1.- A cada hombre se le asigna a lo más una mujer.

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mn} \leq 1 \qquad \forall n = 1,\ldots,N$$

2.- A cada mujer se le asigna exactamente un hombre.

$$\sum_{n=1}^{N} X_{mn} = 1 \qquad \forall m = 1,\ldots,M$$

3.- No se asigna si no hay compatibilidad.

$$X_{mn} \leq C_{mn} \qquad \forall n = 1,\ldots,N; m = 1,\ldots,M$$

4.- Solo se puede tener actividades si se sale en la cita y las actividades no son más de tres.

$$\sum_{a=1}^{A} Y_{mna} \leq 3 \cdot X_{mn} \qquad \forall n = 1,\ldots,N; m = 1,\ldots,M$$

Esta restricción también se puede separa en estas dos restricciones:

$$Y_{mna} \leq X_{mn} \qquad \forall n = 1,\ldots,N; m = 1,\ldots,M; a = 1,\ldots,A$$

$$\sum_{a=1}^{A} Y_{mna} \leq 3 \qquad \forall n = 1,\ldots,N; m = 1,\ldots,M$$

5.- No se pueden pasar del presupuesto para citas

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \sum_{a=1}^{A} \left[(G_{ma} + K_a) \cdot Y_{mna} \right] \leq PSPTO$$

6.- Naturaleza de las variables.

$$X_{mn}, Y_{mna} \in \{0,1\} \qquad \forall n = 1,\ldots,N; m = 1,\ldots,M; a = 1,\ldots,A$$

Función objetivo:

$$\max z = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} [(PM_{mn} + PH_{mn}) X_{mn}] + \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \sum_{a=1}^{A} [(SM_{ma} + SH_{na}) Y_{mna}]$$

Problema 3

Variables

x_n^{tk} = Cantidad (kg) del producto n, que se produce en la planta k en el día t

y_{nj}^{tik} = Cantidad (kg) del producto n, que se envía desde la bodega k hacia el supermercado i por la vía j en el día t.

z_n^{tk} = Inventario (kg) del producto n en la bodega k, al final del día t

Conjunto de índices:

n=1,2,.....,N
j=1,2
t=1,2,.....,T
i=1,2,.......,I
k=1,2,.....,K

Observación:

En un problema de optimización pueden existir varias formas alternativas de definir las variables de decisión. Así por ejemplo, en este problema, podría haberse omitido la variable de inventario (z_n^{tk}) pues queda determinada implícitamente por la producción (x_n^{tk}) y los despachos (y_{nj}^{tik}). Sin embargo, se incluye por claridad de resolución. Notar que al incluir esta variable, debemos agregar una restricción que una lógicamente z_n^{tk} con x_n^{tk} e y_{nj}^{tik} (lo relevante son los *grados de libertad del problema*). En general, la forma en que escojamos nuestras variables hará que sea más fácil o más difícil el planteamiento de las restricciones y función objetivo.

Restricciones

a. Capacidad productiva de la planta

$$x_n^{t,k} \leq K_{k,n} \qquad \forall t, k, n$$

b. Capacidad de Almacenaje en bodega

$$\sum_{n=1}^{N} F_n z_n^{t,k} \leq H_k \qquad \forall t, k$$

c. Satisfacción de demanda de supermercados

$$\sum_{k=1}^{K} y_{n,1}^{t-1,i,k} + \sum_{k=1}^{K} y_{n,2}^{t-2,i,k} \geq D_{n,i} \qquad \forall n, i, \forall t \geq 3$$

$$\sum_{k=1}^{K} y_{n,1}^{t-1,i,k} \geq D_{n,i} \qquad \text{para } t = 2 \text{ y } \forall n, i$$

Observación

$D_{n,i}$ no depende de t porque se supone que todos los días hay la misma demanda.
En la restricción anterior, se utilizó un signo de $\geq$, pero también podría haberse utilizado uno de = ya que es obvio pensar que en el óptimo no mandaremos mas producto del que sea estrictamente necesario.
Notar también que como el inventario inicial es cero, es imposible satisfacer la demanda del primer periodo, pues el transporte más rápido demora un día en llegar a los supermercados.

d. Balance de flujos de inventario(Une producción, despacho e inventario)

$$z_n^{(t-1),k} + x_n^{t,k} - \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{I} y_{n,j}^{t,i,k} = z_n^{t,k} \qquad \forall t,k,n$$

e. Factibilidad de los despachos (No puedo mandar lo que no tengo en inventario)

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{I} y_{n,j}^{t,i,k} \leq z_n^{(t-1),k} + x_n^{t,k} \qquad \forall t,k,n$$

f. Condición de borde

$$z_n^{0.k} = 0 \qquad \forall k,n$$

g. Naturaleza de las variables o No negatividad de las variables

$$x_n^{t,k}, y_{n,j}^{t,i,k}, z_n^{t,k} \geq 0 \qquad \forall i,j,k,n,t$$

Observación

La restricción (f) se incluye para que las restricciones (d) y (e) queden bien definidas cuando t=1. Alternativamente la restricción (d) podría haberse separado en dos casos:

$$z_n^{(t-1),k} + x_n^{t,k} - \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{I} y_{n,j}^{t,i,k} = z_n^{t,k} \qquad \forall k,n,\forall t \geq 2$$

$$x_n^{t,k} - \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{I} y_{n,j}^{t,i,k} = z_n^{t,k} \qquad \text{para } t=1 \text{ y } \forall k,n$$

Y de la misma forma la restricción (e):

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{I} y_{n,j}^{t,i,k} \leq z_n^{(t-1),k} + x_n^{t,k} \qquad \forall k,n,\forall t \geq 2$$

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{I} y_{n,j}^{t,i,k} \leq x_n^{t,k} \qquad \text{para } t=1 \text{ y } \forall k,n$$