



Tarea 1 - FI43A Electrodinámica

Publicada el 26 de marzo de 2009

Profesores: Alvaro Nuñez
Auxiliar: Joaquín Figueroa

1. **Movimiento rectilíneo** Un auto viaja con en una pista muy larga con velocidad β , un auto mas pequeño viaja sobre el primero con velocidad β con respecto al primer auto en la misma dirección. Un tercer auto, de manera análoga viaja sobre el segundo con velocidad β con respecto a este en la misma dirección, y de la misma manera hasta tener n autos . ¿Cuál es la velocidad v_n del n -ésimo carro relativa al sistema de referencia de la mesa? ¿A qué valor tiende v_n al tener $n \rightarrow \infty$?
2. **Movimiento acelerado** Una partícula se mueve con una tri-velocidad $\mathbf{u}$ y una tri-aceleración $\mathbf{a}$ visto desde un observador inercial en el sistema S . Otro observador inercial, en un sistema S' que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto al sistema S . Muestre que os componentes de la aceleración de la partícula paralelos y perpendiculares a $\mathbf{v}$ medidas por el observador en S' son

$$a'_{\parallel} = \frac{(1 - v^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^3} a_{\parallel}$$

$$a'_{\perp} = \frac{(1 - v^2)}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^3} [a_{\perp} - \mathbf{v} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{u})]$$

3. **Paradoja 2** Ranas gigantes, son capturadas y encerradas en un largo cilindro de metal, que se coloca en un avión. Durante el vuelo, las puertas de la bodega se abren accidentalmente, lo que deja caer el cilindro que contiene a las ranas. estas sienten que algo no esta bien e intentan escapar ubicándose en el centro del cilindro saltan para golpear simultaneamente los extremos del cilindro. Ellas inmediatamente despues cruzan el cilindro y lo vuelven a golpear en el extremo opuesto, lo que continua hasta que el cilindro golpea el suelo. Considere, como se ve lo anterior desde un sistema inercial cayendo a una velocidad diferente. En este sistema, las ranas no golpean las orillas del cilindro simultaneamente, por lo que el cilindro se sacude atrás y adelante con velocidad media β
 - ¿Significa esto que un sistema inercial puede sacudirse atrás y adelante con respecto a otro?
4. **Movimiento circular relativista** Considere una circunferencia de radio R centrada en el origen de un sistema inercial S , en la circunferencia se encuentra un observador que se mueve con velocidad angular constante ω visto desde el sistema de referencia S . El observador, se encuentra en su propio sistema de referencia S' , en el cual observa que se encuentra sobre una circunferencia que gira sobre su propio eje, pero que el se encuentra inmóvil.
 - a) ¿El tiempo para el observador en S' , es el mismo que el tiempo medido en el sistema S ? De no se así de una expresión para la relación entre los tiempos medidos en S y S' .
 - b) ¿Qué distancia mide el observador en S' , que recorre la circunferencia antes de volver a su punto de partida?

- c) Considere ahora, que el observador en S' , se encuentra suspendido en un sistema inercial, y que observa a sus pies una circunferencia en el suelo que esta girando con velocidad angular constante ω ¿Qué distancia observa ahora que recorre la circunferencia antes de volver a su punto de partida? Comente y contraste con el resultado anterior

5. **Conceptos de relatividad** Tomando en consideracion las siguientes definiciones

- **Cuadro de Lorentz** O sistema inercial, que se puede relacionar a otro mediante transformaciones de Lorentz
- **Evento** Corresponde a un punto en el espacio de 4 dimensiones
- **Intervalo de tipo espacio** Un intervalo que tiene medida negativa, es decir, $dS^2 < 0$
- **Intervalo de tipo tiempo** Un intervalo que tiene medida positiva, es decir, $dS^2 > 0$

Conteste lo siguiente

- a) Si 2 eventos son separados por un intervalo de tipo espacio muestre que
- 1) Existe un cuadro de lorentz, en el que los eventos son simultáneos
 - 2) No existe ningún cuadro de lorentz en el que ocurran en el mismo lugar
- b) Si 2 eventos son separados por un intervalo de tipo tiempo muestre que
- 1) Existe un Sistema inercial en el que ocurren en el mismo lugar
 - 2) No existe un sistema tal que sean simultáneos
6. **Transformación de Lorentz general** Una transformación de Lorentz generalizada, que transforma las coordenadas del sistema S al sistema S' de la forma:

$$x'^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha} x^{\beta} + a^{\alpha}$$

Donde Λ_{β}^{α} y a^{α} son constantes. Debido a la invariancia del intervalo se debe tener que:

$$\Lambda_{\delta}^{\alpha} \Lambda_{\gamma}^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\delta\gamma}$$

con $\eta_{\alpha\beta}$ la métrica de Minkowski.

Además si se tiene que $a^{\alpha} = 0$ y se cumple

$$\Lambda_0^0 \geq 1 \quad \text{Det}(\Lambda) = 1$$

En cuyo caso se denominan transformaciones de Lorentz propias.

- a) Muestre que las transformaciones de Lorentz propias cumplen:

$$(\Lambda_0^0)^2 = 1 + \sum_{i=1,2,3} (\Lambda_0^i)^2 \geq 1$$

$$\text{Det}(\Lambda)^2 = 1$$

- b) Usando las ecuaciones anteriores muestre que:

$$\Lambda_0^0 = \gamma \quad \Lambda_0^i = v^i \gamma$$

$$\text{con } \gamma = (1 - \mathbf{v}^2)^{-\frac{1}{2}}$$

- c) Note que aun faltan elementos indeterminados. Muestre que los elementos por determinar, propuestos de la forma

$$\Lambda_j^i = \delta_{ij} + v_i v_j \frac{\gamma - 1}{\mathbf{v}^2} \quad \Lambda_j^0 = \gamma v_j$$

Completan una transformacion de lorentz generalizada propia

(Nota: en este ejercicio, se usa $\mathbf{c} = 1$)

7. **Movimiento acelerado** Considere un sistema inercial S en el cual hay graneros de largo L ubicados cada 3 kilómetros de distancia en línea recta. Un observador en un auto experimental, comienza a acelerar desde el origen del sistema S , en tiempo $t = 0$, con aceleración constante $|\vec{a}| = 2g$ en su propio sistema de referencia S' , donde tiene su reloj sincronizado al sistema S en el instante de partida.

- ¿A qué velocidad debe moverse el observador, para que el largo que mide de los graneros, tenga un factor 2 con respecto a su largo en el sistema en reposo S ?
- ¿Cuánto tiempo ha transcurrido en el sistema S , y cuanto en el sistema S' ?

Fluido relativista, Introducción Una descripción adecuada de la energía, momentum y stress de un fluido o campo relativista, utiliza el tensor simétrico $\mathbf{T}$, tensor de tensiones y energía (también llamado tensor de energía momentum). Los componentes de este tensor en el sistema de Lorentz de un observador, están relacionados con las mediciones hechas por ese observador de la siguiente manera

- $T^{00} \equiv$ densidad de masa-energía (comúnmente anotada ρ)
- $T^{0j} = T^{j0} =$ componente j de la densidad de momentum = componente j del flujo de energía
- $T^{ij} =$ Componentes del tensor de tensiones

Si $T^{\mu\nu}$ describe todos los campos, fluidos, partículas, etc. presentes en un sistema, la relación entre el flujo de momentum y el cambio de energía, se sintetiza en la ecuación de movimiento

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$$

8. **Lorentz, para un fluido** En un sistema inercial en reposo, un fluido perfecto, tiene por tensor de energía-stress, en términos de la densidad de masa-energía ρ y presión p , el tensor diagonal

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{bmatrix}$$

Si cada elemento infinitesimal de un fluido, de densidad y presión ρ y p , se mueve con cuadrivelocity $\mathbf{u}$, Determine su tensor de tensiones y energía

9. Si el tensor de tensiones y energía es

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + p P^{\alpha\beta} - 2\eta \sigma^{\alpha\beta} - \xi \theta P^{\alpha\beta}$$

Muestre que las ecuaciones de movimiento derivadas de $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$ se reducen a las ecuaciones de Navier-Stokes en el límite no relativista, donde:

$$\theta = V \cdot \mathbf{u} - u^\alpha{}_{;\alpha}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(u_{\alpha;\mu} P^\mu_{\beta} + u_{\beta;\mu} P^\mu_{\alpha} \right) - \frac{1}{3} \theta P_{\alpha\beta}$$

$$P_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta$$

además η y ξ corresponden a los coeficientes de viscosidad de cizalle y de masa respectivamente, mientras que $g_{\alpha\beta}$ es la métrica de Minkowski.