Unidad 3 - Modos Normales de una barra y Análisis de Fourier

Conceptos:

1. Tensión y deformación
2. Movimiento ondulatorio simple
3. Ondas periódicas
4. Ondas estacionarias

Tensión y deformación

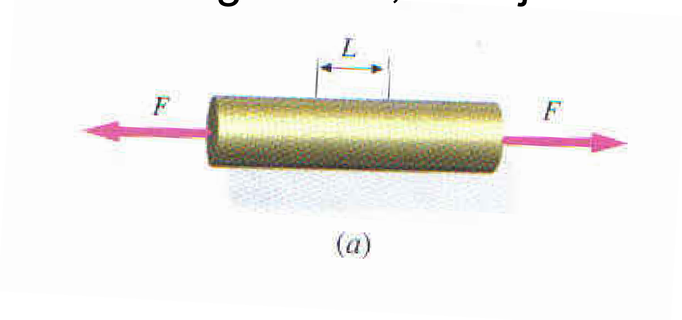
Objeto sólido sometido a fuerzas (alargamiento, compresión, corte): variación de forma.

Si el objeto recupera su forma original después de suprimir las fuerzas: deformación elástica.

Limite elástico: si las fuerzas son lo suficientemente grandes, el objeto se deforma permanentemente.

Deformación:

$$deformación = \frac{\Delta L}{L}$$



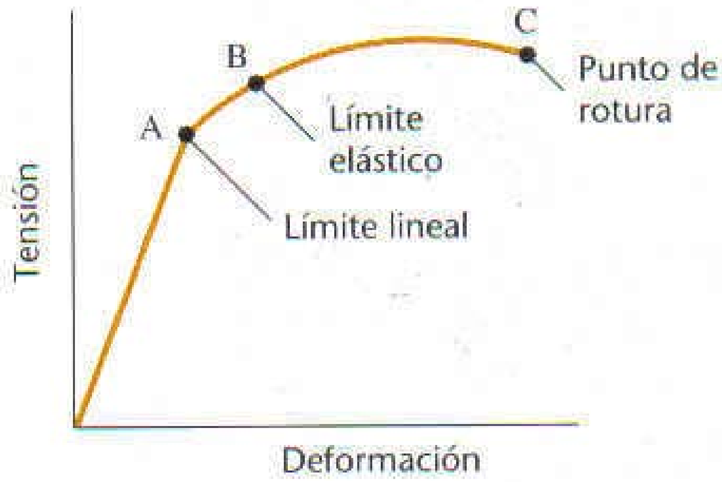
Fuerza

Cuociente entre la fuerza F y el área de la sección recta A de la barra se denomina **tensión o esfuerzo de tracción (tensión):**

$$Tensión = \frac{F}{A}$$

Tensión y deformación

Tensión x Deformación de un objeto



Tensión en fucción de la deformación

A: limite lineal, tensión es proporcional a la deformación (Ley de Hooke)

B: limite elastico del material.

C: punto de rotura

Cuociente entre la tensión y la deformación en la zona lineal es una constante denominada **módulo de Young o módulo de elasticidad** *E*.

$$E = \frac{tensión}{deformación} = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

(N/m² o Pa)

Este módulo puede ser interpretado como la rigidez, o sea, la resistencia de un material a la deformación elástica. Cuanto mayor es el módulo, más rígido es el material, o sea, menor es la deformación elástica que se origina cuando se aplica una determinada tensión.

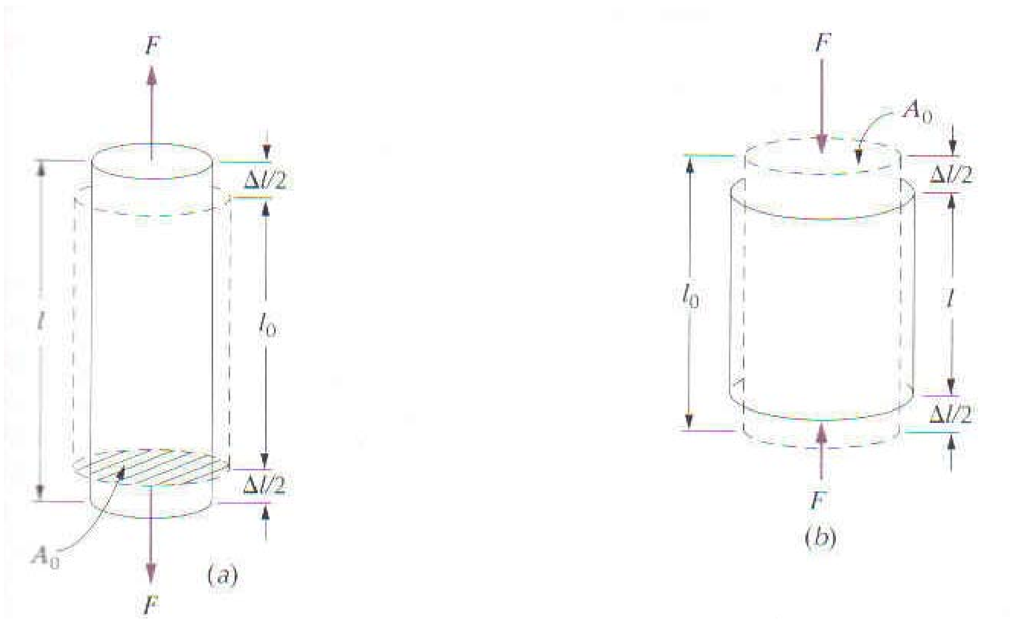
Tensión y deformación

Cuando sobre un material se aplica una tracción, se produce un alargamiento elástico y una deformación en la dirección de la carga aplicada. Como resultado, se producirán contracciones el las direcciones laterales perpendiculares a la dirección de la tensión.

Coeficiente de Poisson: cuociente entre las deformaciones laterales y axiales.

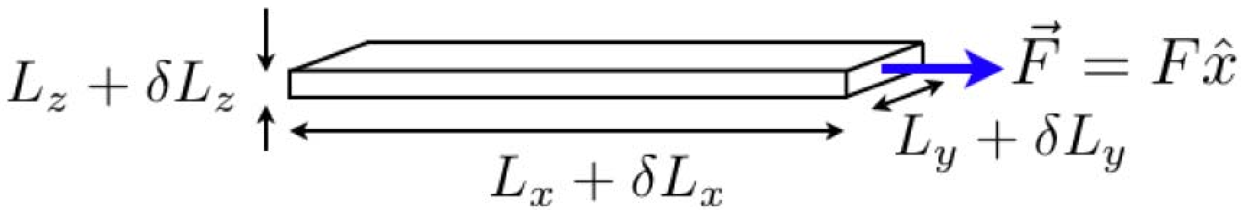
$$v = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z}$$

$$\varepsilon = \frac{l_i - l_o}{l_o} = \frac{\Delta l}{l_o}$$



Tensión y deformación

Considerando un sólido elástico:



$$\begin{aligned}
\frac{\delta L_x}{L_x} &= \frac{1}{E}\frac{F}{A},\\
\frac{\delta L_y}{L_y} &= -\nu\frac{\delta L_x}{L_x},\\
\frac{\delta L_z}{L_z} &= -\nu\frac{\delta L_x}{L_x}.
\end{aligned}$$

Acordando que:

$$v = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z}$$

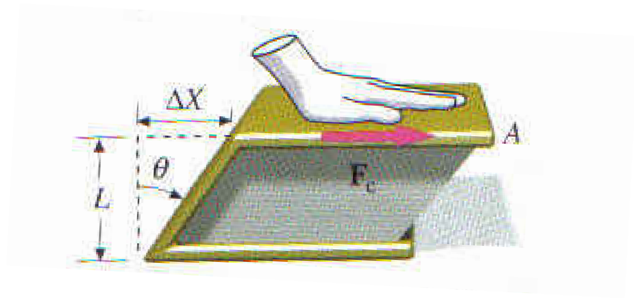
$$E = \frac{tensión}{deformación} = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

Tensión y deformación

Fuerza de corte: fuerza tangencial F_c en la parte superior de un libro.

Tensión de corte: Cuociente entre la fuerza de corte F_c y el área

$$tensión.de.corte = \frac{F_c}{A}$$



$$deformación.de.corte = \frac{\Delta_x}{L} = tg\theta$$

Módulo de corte o módulo de torsión: cociente entre la tensión y la deformación por corte M_c:

$$M_c = \frac{tensión.de.corte}{deformación.de.corte} = \frac{F_c/A}{\Delta x/L} = \frac{F_c/A}{tg\theta}$$

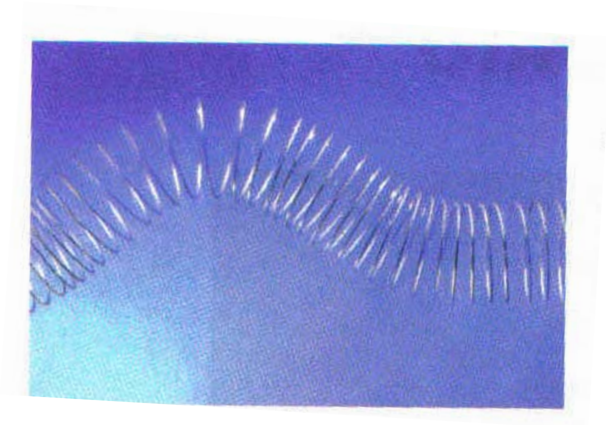
Tensión y deformación

Material	Y GN/m² [b]
Acero	200
Aluminio	70
Cobre	110
Hierro (forjado)	190
Hormigón	23
Hueso	
Por tracción	16
Por compresión	9
Latón	90
Plomo	16

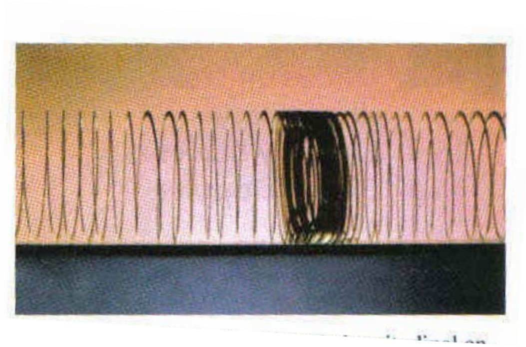
Movimiento ondulatorio simple

Onda transversal: perturbación es perpendicular a la dirección de propagación (ej. Cuerda)

Onda longitudinal: perturbación es paralela a la dirección de propagación (ej. Resorte).



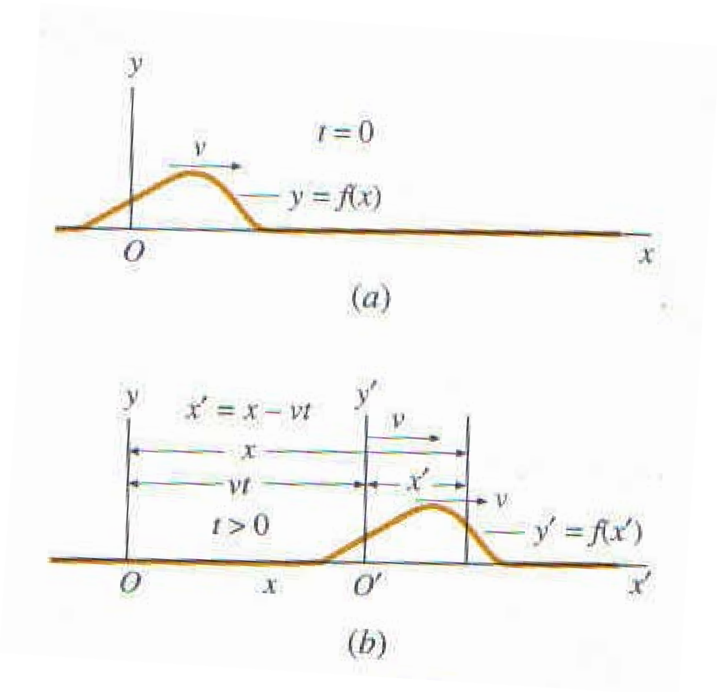
transversal



longitudinal

Movimiento ondulatorio simple

Pulsos de onda en una cuerda.



$x = x' + vt$ Y por lo tanto $f(x') = f(x - vt)$

Movimiento ondulatorio simple

El desplazamiento de la cuerda en el sistema original O puede describirse:

$$y = f(x - vt)$$ Moviendose en el sentido positivo de x

o

$$y = f(x + vt)$$ Moviendose en el sentido negativo de x

v es el módulo de la velocidad de propagación de la onda.

La función $y = f(x - vt)$ se denomina **función de onda**.

Movimiento ondulatorio simple

Velocidad de las ondas: Depende de las propiedades del medio e independiente del movimiento de la fuente de las ondas. Ej. Bocina de un auto.

En una cuerda: $$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

F_T: tensión (N)
μ: densidad de masa lineal (masa por unidad de longitud)

$$v = \sqrt{\frac{N}{Kg/m}} = \sqrt{\frac{Kg.m}{s^2} . \frac{m}{Kg}} = m/s$$

En un solido:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

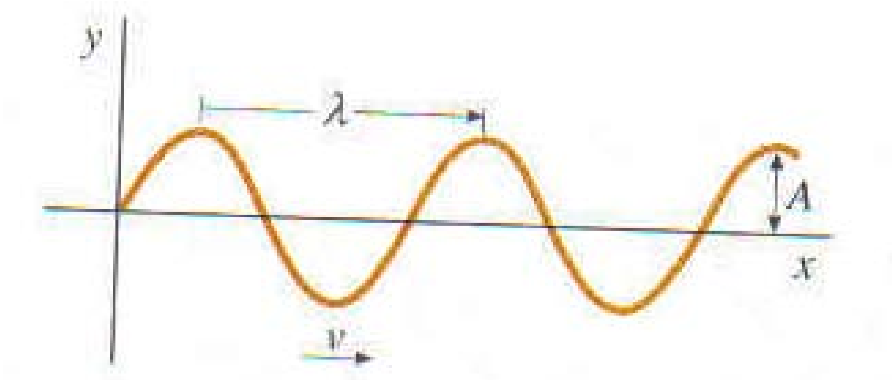
E: módulo de Young (Pa)
ρ: densidad de masa (masa por unidad de volume)

$$v = \sqrt{\frac{Pa}{Kg/m^3}} = \sqrt{\frac{Kg}{ms^2} . \frac{m^3}{Kg}} = m/s$$

Ondas periódicas

Si el extremo de una cuerda se mueve de forma periódica hacia arriba y hacia abajo, se genera una onda periódica. Si una onda periódica se mueve a lo largo de un medio, cada punto del medio oscila con el mismo periodo.

En el movimiento armónico simple, la frecuencia y el periodo son independientes de la amplitud.
La distancia minima recorrida en el espacio hasta que la función de onda se repite es denominada longitud de onda λ



Período: $$T = \frac{1}{f}$$

De modo que, la velocidad viene dada por:

$$v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda$$

Ondas periódicas

Función sinusoidal que describe el desplazamiento:

$$y(x) = Asen\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \delta\right)$$

A: amplitud
δ: constante de fase que depende de la elección del origen x=0.
Λ: longitud de onda

O, de forma mas sencilla:

$$y(x) = Asen(kx + \delta)$$

Donde: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ (m^{-1}) as veces puede expresarse en radianes (rad/m).

Para describir una onda que se mueve en el sentido creciente de x con velocidad v, sustituyamos x por x-vt (onda moviéndose en el sentido positivo). Eligiendo δ=0 se obtiene:

$$y(x,t) = Asenk(x - vt) = Asen(kx - kvt)$$

o

$$y(x,t) = Asen(kx - \omega t)$$

Donde: $\omega = kv$

Ondas periódicas

Sustituyendo

$$\omega = 2\pi f = kv = \frac{2\pi}{\lambda} v$$

o

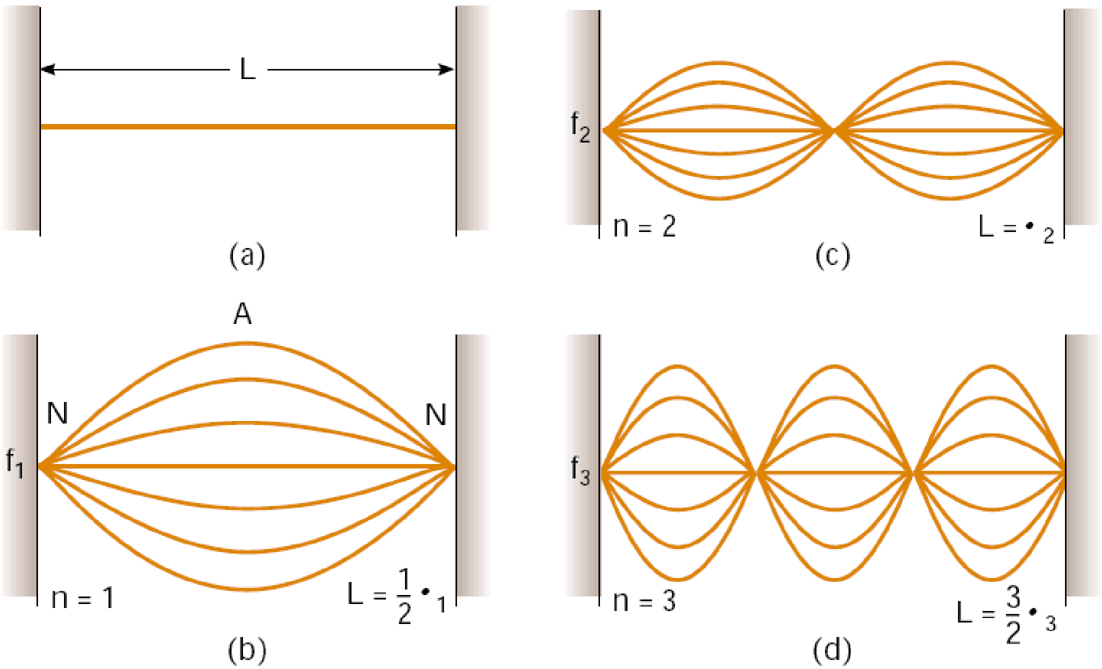
$$v = f\lambda$$

Ondas Estacionarias

Onda estacionaria: ondas confinadas en el espacio donde existen ondas en los dos sentidos y para ciertas frecuencias hay la superposición de un patrón de vibración estacionario, que se combinan de acuerdo con el principio de superposición. Ej. Tubo de órgano, ondas luminosas de un láser.

Ondas estacionarias en cuerdas:

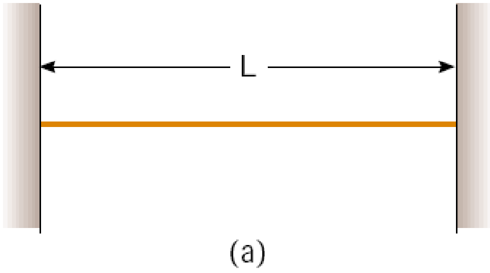
Cuerda fija en ambos extremos: moviendo una cuerda, para ciertas frecuencias unos patrones de onda estacionaria semejantes a los de la figura abajo, denominados **frecuencias de resonancia**.

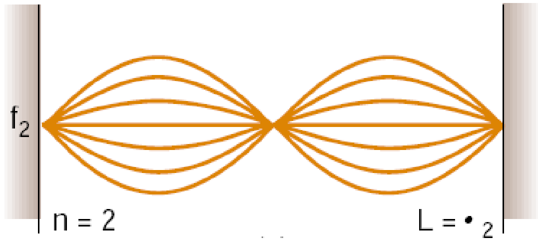


Cada una de estas frecuencias y función de onda se llama **modo de vibración**.

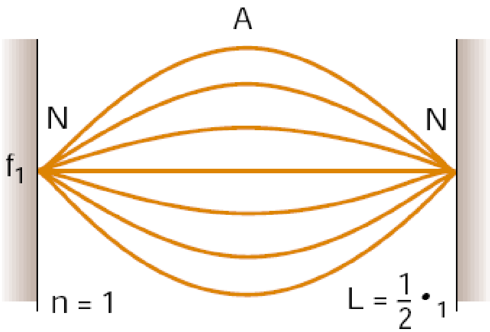
Ondas Estacionarias

La frecuencia de resonancia mas baja se denomina frecuencia fundamental f1 y produce el patrón de onda estacionaria que recibe el nombre de modo fundamental de vibración o primer armónico.

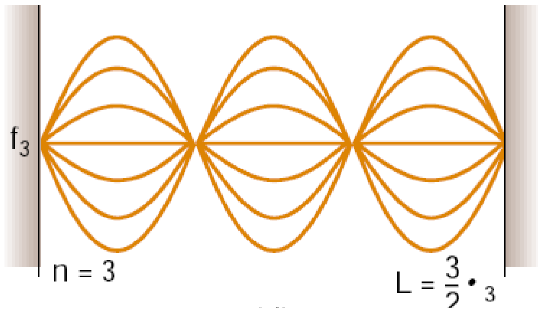




segundo armónico



modo fundamental de vibración
o primer armónico

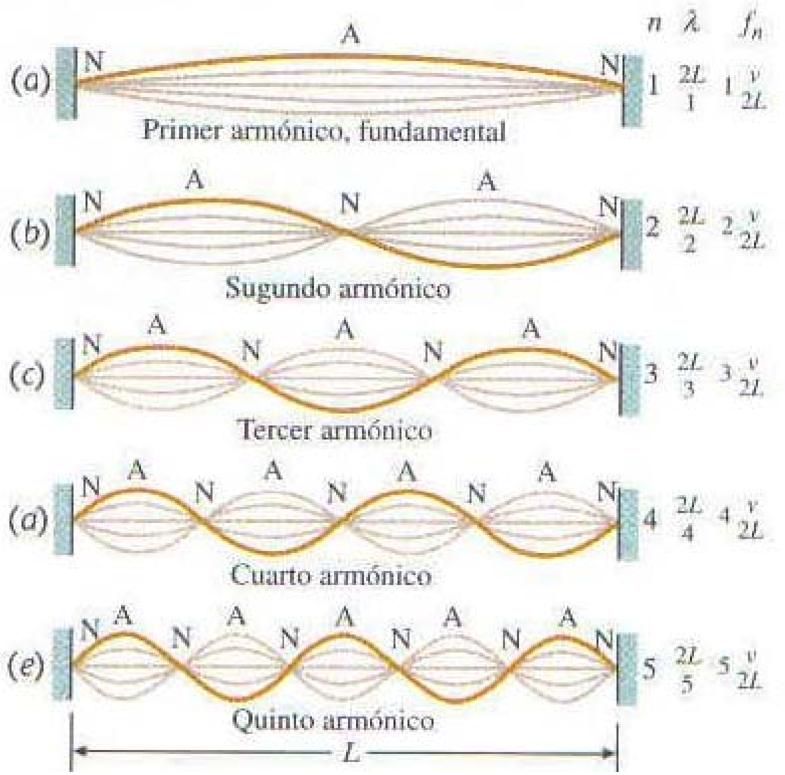


tercer armónico

El conjunto de todas las frecuencias resonantes de la cuerda se denomina **espectro de frecuencias de resonancia**.

Ondas Estacionarias

Los puntos de la cuerda que no se mueven se denominan nodos. El punto intermedio de cada par de nodos, la amplitud de vibración maxima se denomina vientre o antinodo.



$$L_1 = \frac{\lambda}{2}$$

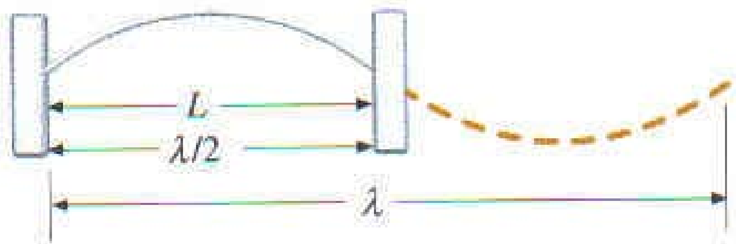
$$L_2 = \lambda$$

$$L_3 = \frac{3\lambda}{2}$$

$$L_4 = 2\lambda$$

La distancia entre un nodo y el antinodo mas proximo es un cuarto de longitud de onda.

Periodo = λ



$$L = \frac{n\lambda_n}{2}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

n= 1,2,3,... Condición de onda estacionaria con ambos extremos fijos

Ondas Estacionarias

$$f = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2L/n}$$ n= 1,2,3,...

o

$$f_n = n\frac{v}{2L}$$ n= 1,2,3,...

Donde:

$$f_1 = \frac{v}{2L}$$

Es la frecuencia fundamental o frecuencia natural

No todas las frecuencias de resonancia reciben la denominación de armónico si no únicamente aquellas del espectro de frecuencia resonante que son múltiplo entero de la frecuencia fundamental.

Ondas Estacionarias

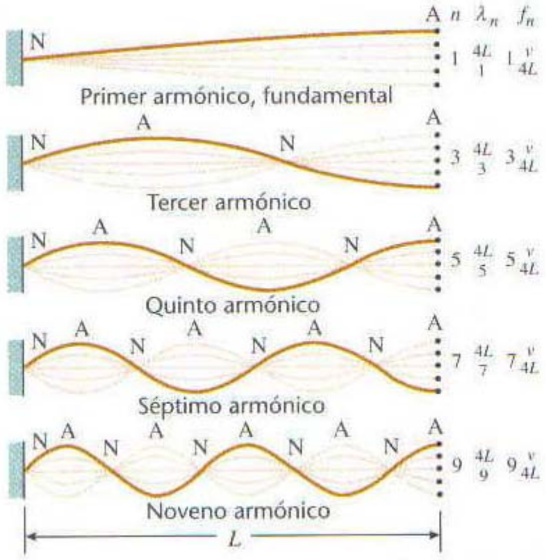
Cuerda fija en un extremo y libre por el otro:

En cada modo de vibración hay un numero impar de cuartos de longitud de onda en toda la cuerda, es decir, $L=n\lambda_n/4$, en donde n=1,3,5,...

$$L = n\frac{\lambda_n}{4}$$

n=1,3,5,...

Condición de onda estacionaria, un extremo libre



$$f = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{4L} = nf_1$$

n= 1,2,3,... Frecuencia de resonancia, un extremo libre

Donde:

$$f_1 = \frac{v}{4L}$$

Frecuencia fundamental