Unidad 2 - Corriente Alterna

Conceptos:

1. Oscilaciones Forzadas y Resonancia
2. Corriente alterna en una resistencia
3. Inductores en circuitos ca
4. Condensadores en circuitos ca
5. Fasores
6. Circuito LCR con generador
7. Filtros pasa alto y pasa bajo

Oscilaciones Forzadas y Resonancia

En un circuito LC o LRC (con un amortiguamiento suficientemente pequeño:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Frecuencia angular natural del sistema oscilante

Esta frecuencia antes denominada ω ahora es denominada ω_o.

Un circuito sometido a una fem varia ahora con la frecuencia angular controlada ω

$$\varepsilon = \varepsilon_m sen\omega t$$

ε_m es la amplitud de la fem
ω es la frecuencia angular propulsora

Las oscilaciones de carga, corriente y diferencia de potencial son denominadas **oscilaciones forzadas**.

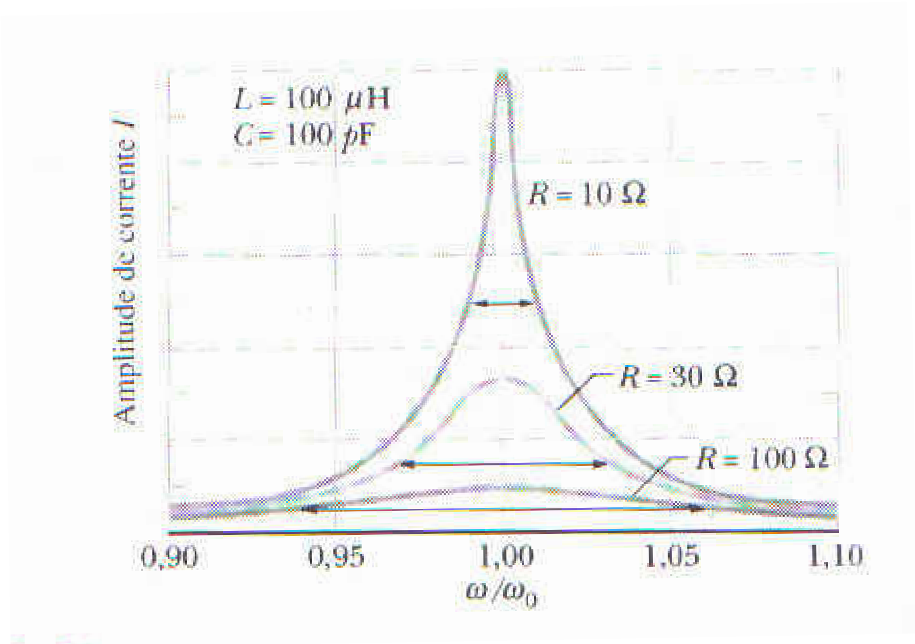
La corriente:

$$i = Isen(\omega t - \phi)$$

Las letras minúsculas i, v, representan los valores instantáneos de magnitudes variables en el tiempo y las letras mayúsculas representan, I, V, presentan las amplitudes correspondientes.

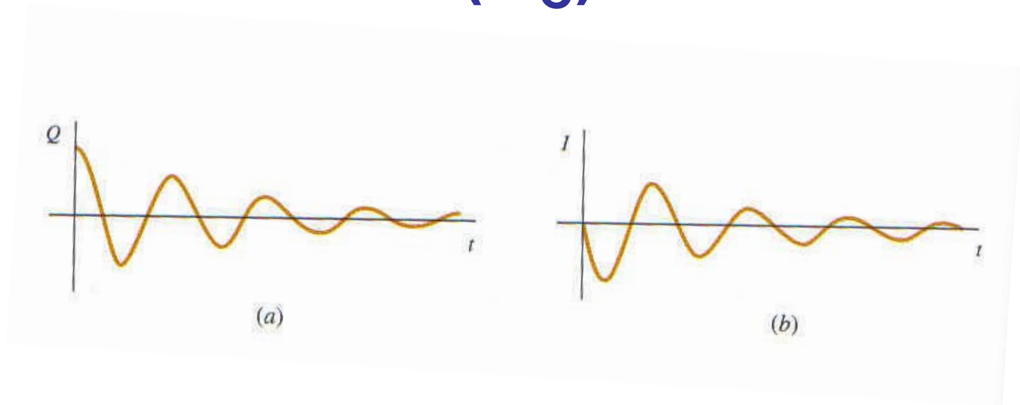
Oscilaciones Forzadas y Resonancia

$\omega = \omega_o$ Condición de resonancia



Resistencia crítica (R_C)

$$R_{critica} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_c$$



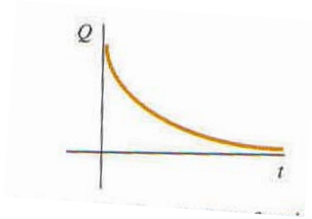
Oscilaciones amortiguadas R<RC: La corriente en el circuito oscila sinusoidalmente con una amplitud que disminuye con un tiempo característico τ:

$$\tau = 2\frac{L}{C}$$

Circuito LC ideal, R→0 y τ→∞: el circuito oscila indefinidamente a su frecuencia natural ω_o.

Amortiguamiento crítico $R=R_C$: La resistencia es suficiente para impedir las oscilaciones. La corriente decrece exponencialmente.

Sobreamortiguamiento $R>R_C$: la corriente también descrece exponencialmente, pero mas lentamente que cuando $R=R_C$.



Corriente alterna de una resistencia

La caída de tensión a través de resistencia V_R es igual a la fem del generador.

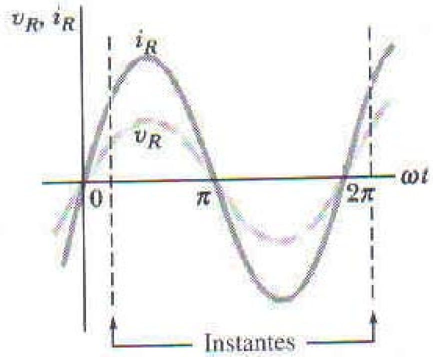
$$\varepsilon - v_R = 0$$

$$v_R = \varepsilon_m sen\omega t$$

(a)

Como la amplitud $V_R=\varepsilon_m$

$$v_R = V_R sen\omega t$$



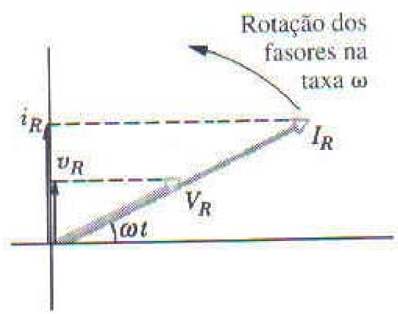
(b)

Fasores:

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{V_R}{R} sen\omega t = I_R sen\omega t$$

Para una carga puramente resistiva la constante de fase vale Φ=0º

$$V_R = I_R R$$



(c)

Condensadores en circuitos de corriente alterna

Voltaje a través del condensador:

$$v_C = V_C sen\omega t$$

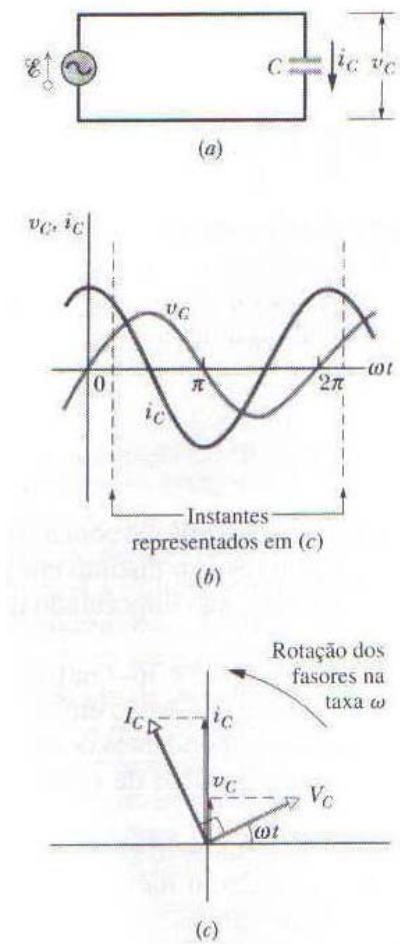
Vc es igual a la fem del generador.

$$q_C = Cv_C = V_C C sen\omega t$$

Derivando obtenemos la corriente:

$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = \omega V_C C \cos \omega t = I_C \cos \omega t$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$



X_C se denomina **reactancia capacitiva** (o también **impedancia capacitiva**).
Unidad: ohmios

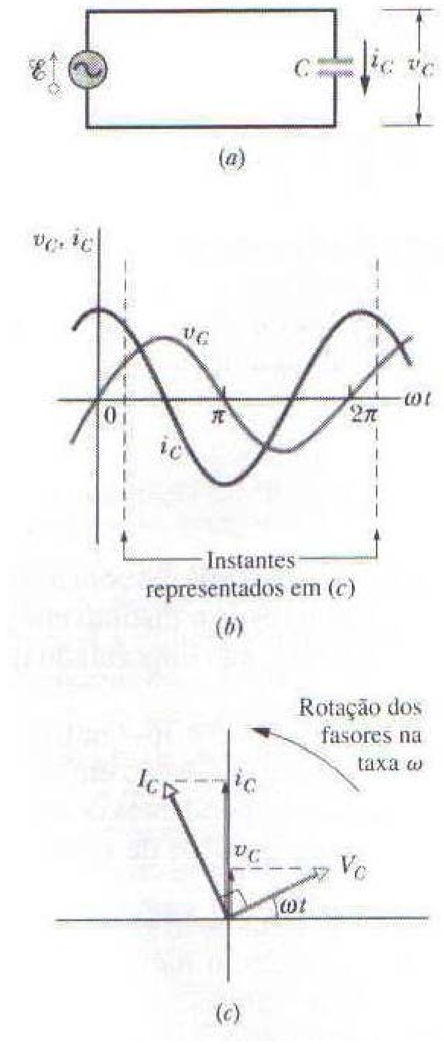
Cuanto **mayor** la frecuencia, **menor** es la reactancia.

Condensadores en circuitos de corriente alterna

Usando la identidad trigonométrica cos θ = sen(θ + π/2), donde θ = ωt:

$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = \omega V_C C\cos\omega t = I_C \cos\omega t$$

$$i_C = \left(\frac{V_C}{X_C}\right) sen(\omega t + 90^o) = I_C sen(\omega t + 90^o)$$



La caída de voltaje de un condensador esta retrasada respecto a la corriente en 90º.

La amplitud de la voltaje y de la corriente están relacionadas por:

$$V_C = I_C X_C$$

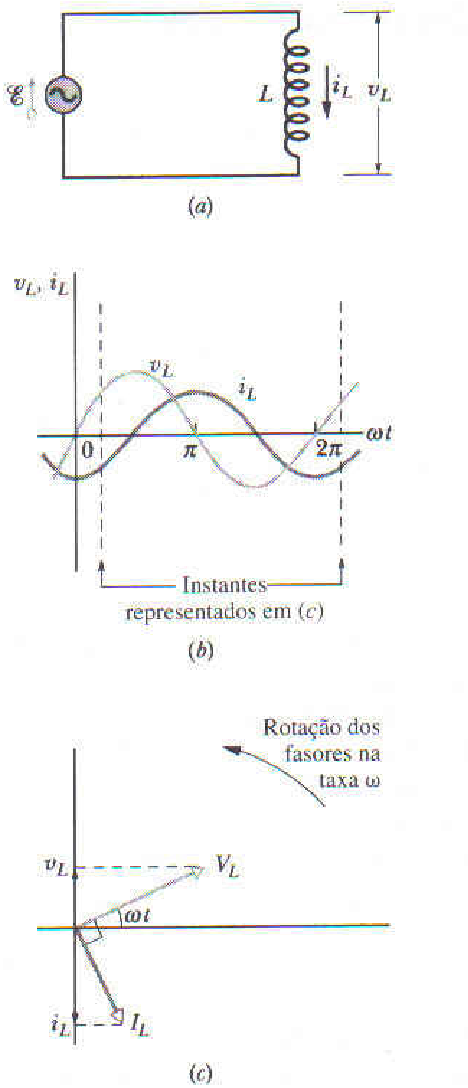
Inductores en circuitos ca

La caída de voltaje a través del inductor V_L viene dado por:

$$v_L = V_L sen\omega t$$

V_L es la amplitud

$$v_L = L\frac{di}{dt}$$



Combinado las dos ecuaciones:

$$\frac{di}{dt} = \frac{V_L}{L} sen\omega t$$

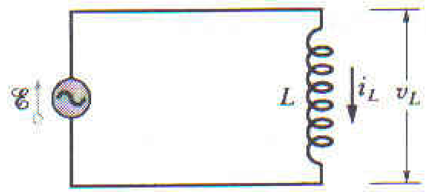
La corriente se obtiene integrando:

$$i_L = \int di_L = \frac{V_L}{L}\int sen(\omega t)dt$$

$$= -\left(\frac{V_L}{\omega L}\right)\cos\omega t$$

Inductores en circuitos ca

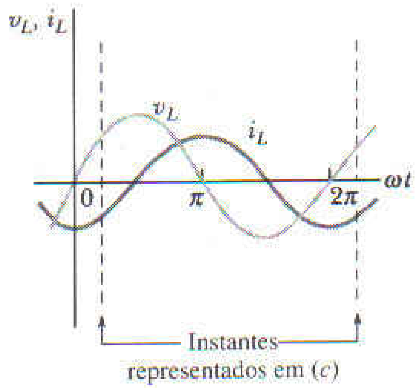
$$i_L = -\left(\frac{V_L}{\omega L}\right)\cos \omega t$$



(a)

Reactancia inductiva

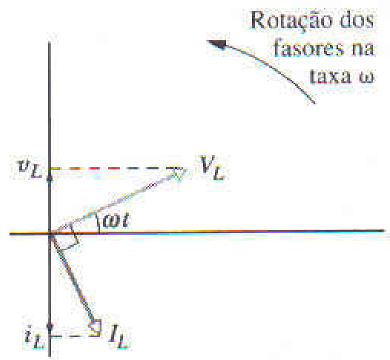
$$X_L = \omega L$$



(b)

X_L se denomina **reactancia inductiva**
(o también **impedancia inductiva**).
Unidad: ohmios

Cuanto **mayor** la frecuencia, **mayor** es la reactancia.

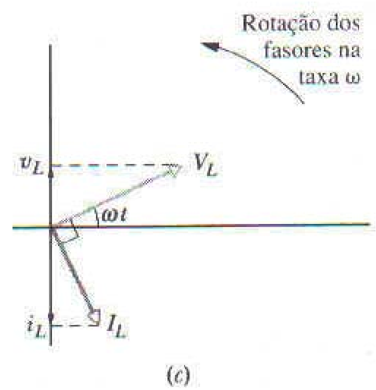


(c)

Inductores en circuitos ca

Usando la identidad trigonométrica -cos θ = sen(θ – π/2), donde θ = ωt:

$$i_L = -\left(\frac{V_L}{X_L}\right)\cos\omega t = \left(\frac{V_L}{X_L}\right) sen(\omega t - 90^o) = I_L sen(\omega t - 90^o)$$



La caída de voltaje en el inductor se adelanta a la corriente en 90º (un cuarto de periodo) antes que el correspondiente valor de la corriente.

La amplitud del voltaje y de la corriente están relacionadas por:

$$V_L = I_L X_L$$

Elemento de circuito	***símbolo***	***Impedancia***	***Fase de corriente***	***Angulo de fase***	***Relación de amplitudes***
Resistencia	R	R	En fase con v_R	0º	V_R=IR
Condensador	C	X_C	Avanzada 90º con relación a v_C	-90º	$V_C=IX_C$
Inductor	L	X_L	Retrasada 90º con relación a v_C	+90º	$V_L=IX_L$

Circuito LRC

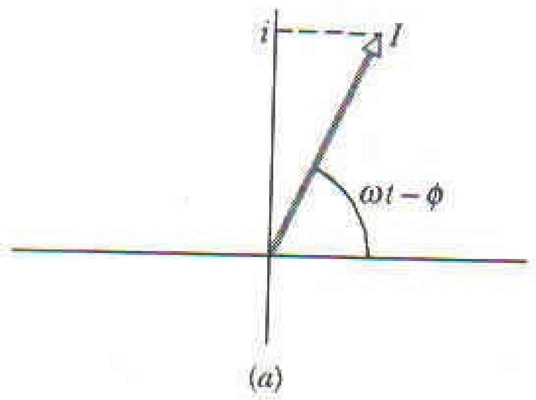
Fem y corriente alternada aplicada es:

$$\varepsilon = \varepsilon_m sen\omega t \qquad i = Isen(\omega t - \phi)$$

Tarea: determinar la amplitud de corriente I y la constante de la fase Φ.

Aplicando la ley de las mallas:

$$\varepsilon = v_R + v_C + v_L$$



I=valor máximo

ωt-Φ=fase

i=valor instantáneo

La diferencia de potencial a través de los elementos del circuito están variando en el tiempo con fases diferentes, pero la corriente es común en todos los elementos (circuito en serie).

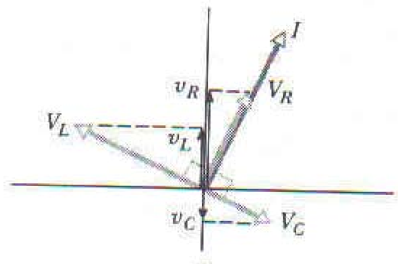
Circuito LRC

Los tres fasores representando las voltajes a través de los tres elementos del circuito R,C y L.

La corriente esta en fase con v_R

Avanzada 90º sobre v_C

Retrazada 90º sobre V_L

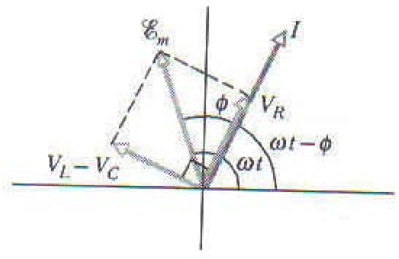


(b)

La suma algebraica de los fasores V_R, V_C, V_L es igual a ε_m.

Φ = diferencia de fase entre la corriente y la fem.

V_L-V_C es perpendicular a V_R. Notamos también:



(c)

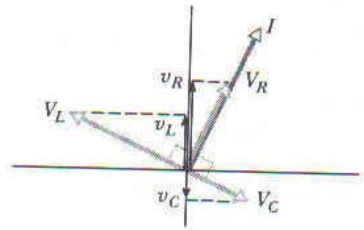
$$\varepsilon_m{}^2 = V_R{}^2 + (V_L - V_C)^2$$

Circuito LRC

De acuerdo con las amplitudes, podemos reescribir como:

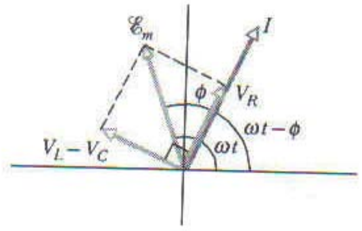
$$\varepsilon_m^{\ 2} = (IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2$$

Que nos permite concluir que:



(b)

$$I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{(R)^2 + (X_L - X_C)^2}}$$



(c)

La **impedancia del circuito Z** para la frecuencia considerada

$$Z = \sqrt{(R)^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Reinscribiendo: $I = \dfrac{\varepsilon_m}{Z}$ Sustituyendo X_L y X_C:

$$I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{(R)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Amplitud de la corriente

Circuito LRC

A partir de esa ecuación, vemos que el valor máximo de I ocurre cuando:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \qquad \text{o} \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{resonancia}$$

Así como vimos, el valor de la corriente I en la resonancia es ε_m/R.

La constante de fase Φ:

$$\tan\phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

En el ejemplo fue elegido arbitrariamente XL>XC; supongo que el circuito es mas inductivo que capacitivo. La ecuación

$$I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{(R)^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

muestra que con relación a amplitud de la corriente, eso no importa, pues (XC – XL) esta elevada al cuadrado. Pero para calcular la fase de la corriente en relacion a la fem aplicada, eso es importante.

Circuito LRC

Casos limites:

Caso 1: $R = X_L = 0$

$$I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{(R)^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\varepsilon_m}{X_C}$$

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = -\infty$$

Circuito puramente capacitivo, la constante de fase Φ = -90º

Caso 2: $R = X_C = 0$

$$I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{(R)^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\varepsilon_m}{X_L}$$

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = +\infty$$

Circuito puramente inductivo, la constante de fase Φ = 90º

Circuito LRC

Las corrientes descritas son del estado estacionario que se establece en algún tiempo después de que la fem es aplicada.

Al momento en que la fem es aplicada en el circuito, surge una corriente transiente cuya duración depende de las constantes de tiempo τ_L=L/R y τ_C=RC.