Unidad 3 - Corriente Alterna

Conceptos:

1. LabView Signal Express
2. Circuito LC
3. Circuito RLC

Oscilaciones Electromagnéticas

En los circuitos **RC y RL** verificamos que la carga, la corriente y la diferencia de potencial crecen y decaen exponencialmente.

La escala de tiempo es dada por una *constante de tiempo* τ, que es capacitiva o inductiva.

En el circuito **LC**, la carga, corriente y diferencia de potencial no varía *exponencialmente* (con la constante de tiempo τ) pero *sinusoidalmente* (con frecuencia angular ω). En otras palabras, el circuito *oscila*.

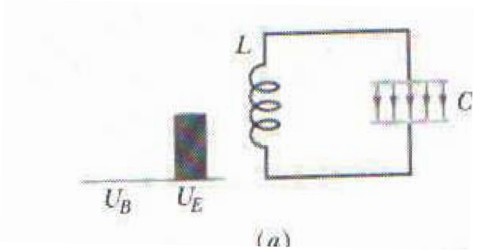
Oscilaciones Electromagnéticas

Supongamos que, inicialmente, la carga del condensador es *q* y la corriente *i*, en el inductor es cero. En este instante, la energía almacenada en el campo eléctrico del condensador es:

$$U_E = \frac{q^2}{2C}$$

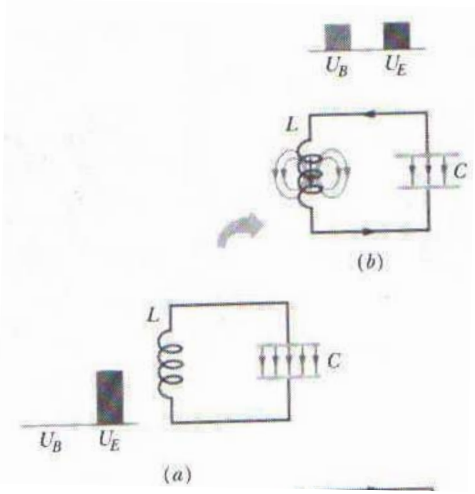
La energía almacenada en en el campo magnético del inductor es cero, pues la corriente es cero.

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2$$



Oscilaciones Electromagnéticas

El condensador empieza a descargar a través del inductor, con portadores de carga positiva moviéndose en el sentido anti-horario. Eso significa que una corriente *i*, dada por *dq/dt* y apuntando para bajo en el inductor es establecida en el circuito. A medida que *q* disminuye, la energía almacenada en el campo eléctrico del condensador también disminuye. Así, el campo eléctrico disminuye, el campo magnético aumenta y energía es transferida del primero hacia el segundo.

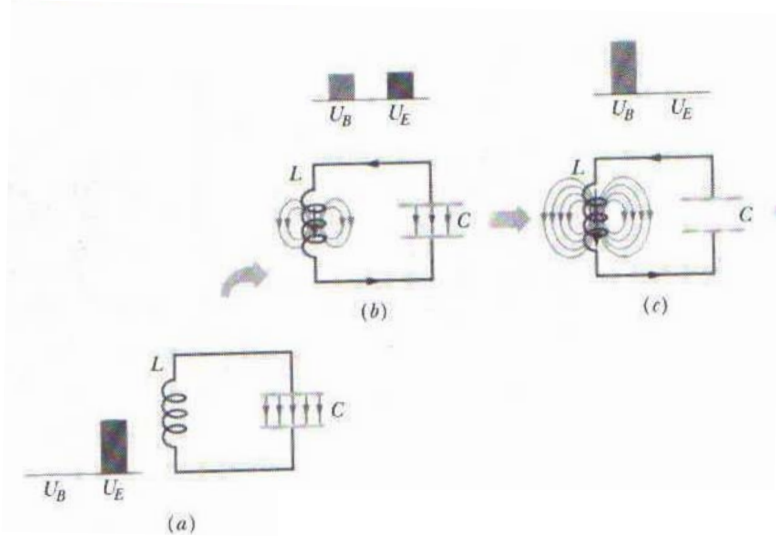


Oscilaciones Electromagnéticas

En el instante c, toda la carga del condensador habrá desaparecido. El campo eléctrico en el condensador será cero, la energía, antes en él almacenada, habrá sido totalmente transferida hacia el campo magnético del inductor. De acuerdo con la ecuación

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2$$

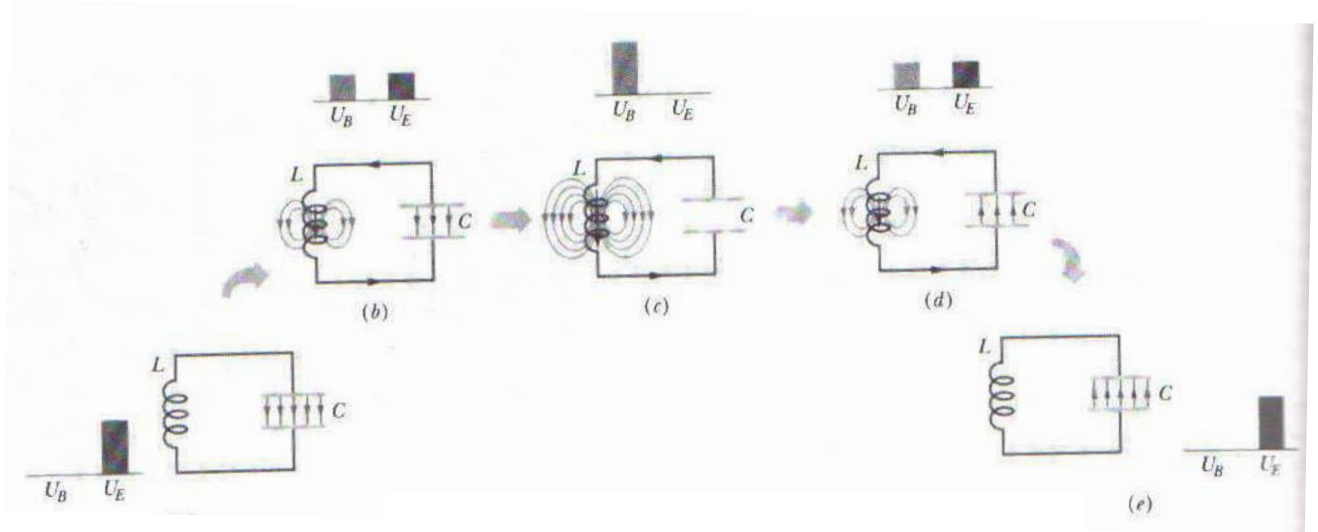
habrá una corriente – de valor maximo – en el inductor. Note que, mismo que la carga *q* sea nula, la corriente (que es la tasa en que q está variando con el tiempo) no es cero en este instante.



Oscilaciones Electromagnéticas

La corriente intensa en el inductor continúa transportando carga positiva desde la placa superior hacia la placa inferior del condensador *(d)*; la energía fluye ahora del inductor, de vuelta hacia el condensador, mientras crecen nuevamente la carga y el campo eléctrico.

Finalmente, la energía acabará siendo totalmente devuelta al condensador *(e)*. La situación en (e) es igual que la inicial, excepto que la polaridad del condensador está, ahora, invertida.

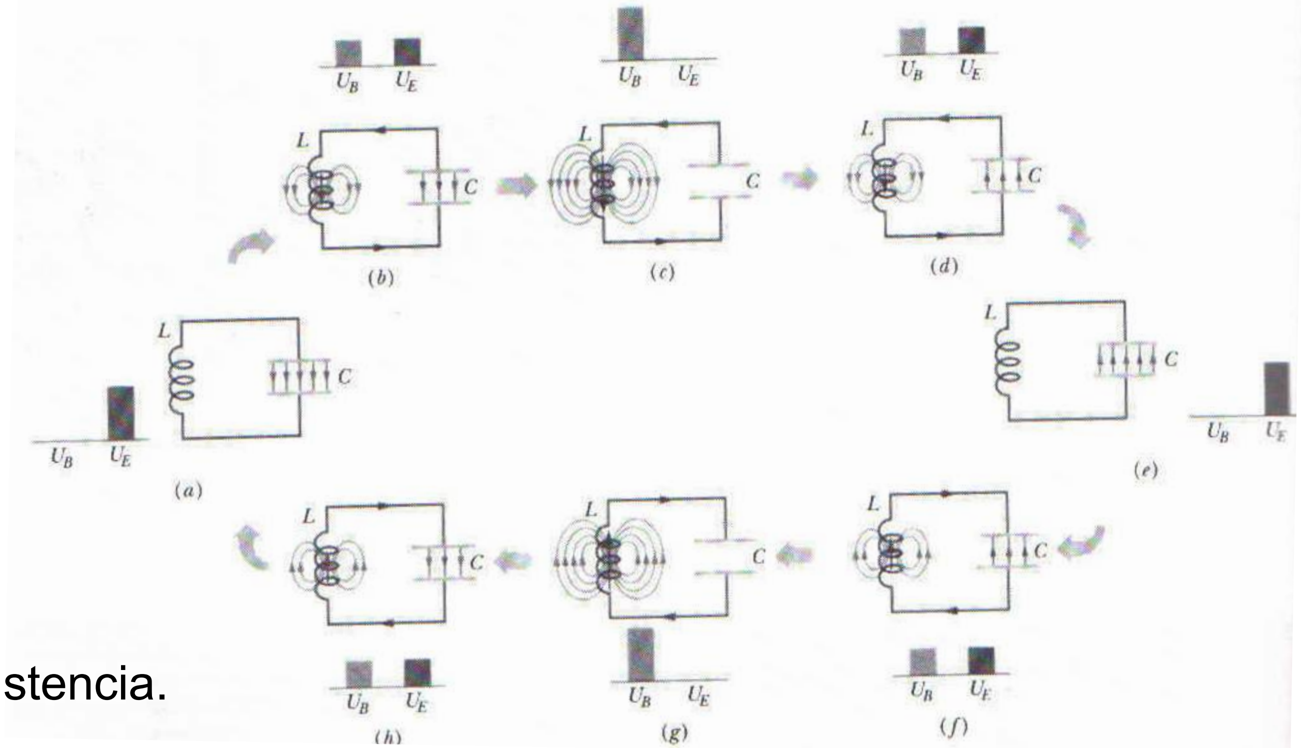


Oscilaciones Electromagnéticas

El condensador empezará a descargar nuevamente, pero con la corriente en el sentido horario *(f)*.

Razonando como antes, concluimos que el circuito retornará finalmente a su situación inicial y que el proceso se repetirá con una frecuencia definida f a la cual le corresponde una frecuencia angular ω (=2πf).

Una vez iniciada las oscilaciones LC, estas van a mantenerse indefinidamente, con continuo cambio de energía entre el campo eléctrico del condensador y el campo magnético del inductor.



Circuito ideal, sin resistencia.

Cualquiera de las configuraciones de la figura puede ser considerada como condición inicial.

Oscilaciones Electromagnéticas

Para determinar la carga q en función del tiempo, podemos usar un voltímetro para medir la diferencia de potencial variable en el tiempo Vc, que existe entre las placas del condensador C.

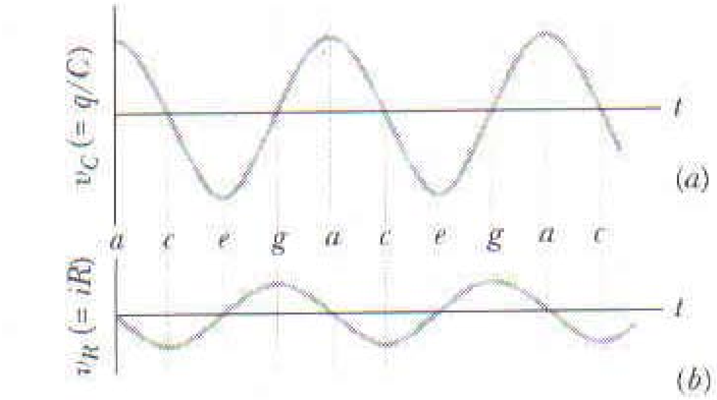
$$V_C = \left(\frac{1}{C}\right)q$$

Para medir la corriente, podemos insertar una pequeña resistencia R en serie en el circuito y medir la diferencia de potencial variable V_R a través de ella.

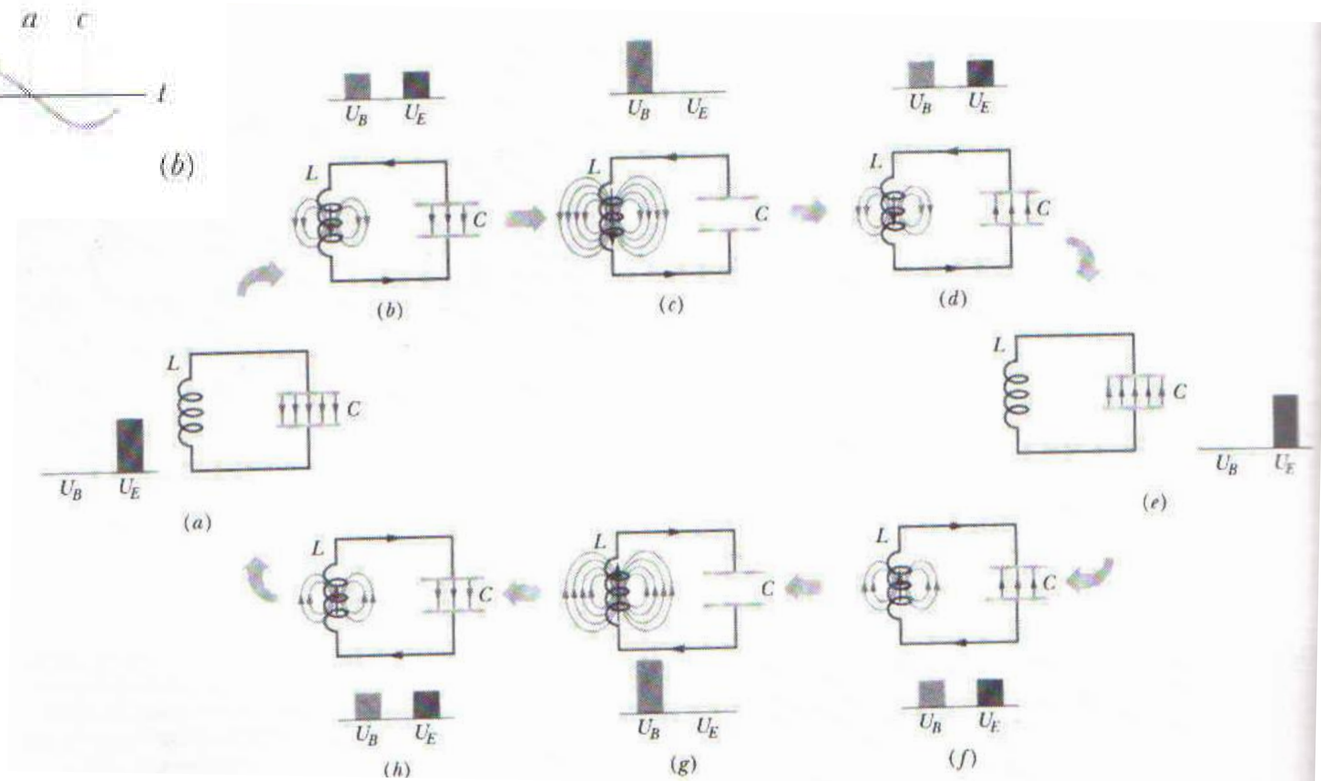
$$V_R = Ri$$

Oscilaciones Electromagnéticas

Supongamos que R es muy pequeño de tal forma que su efecto sobre el comportamiento del circuito sea despreciable. Las variaciones en el tiempo de *q* y *i*, o mas correctamente de V_C y V_R (que son proporcionales) son:



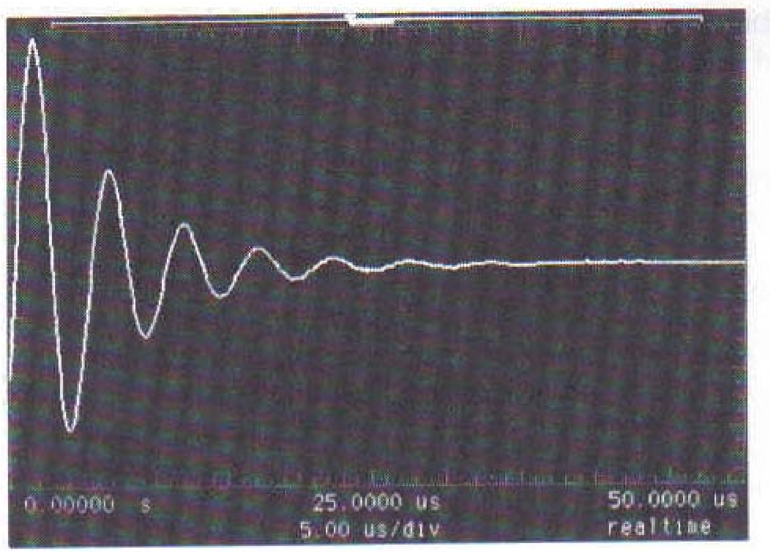
Ambas varían de forma sinusoidal.



Oscilaciones Electromagnéticas

En un circuito LC real, las oscilaciones no continuan indefinidamente porque siempre existe alguna resistencia presente que retira gradualmente energía de los campos electrico y magnetico y la disipa como energia térmica.

Las oscilaciones una vez iniciadas van siendo amortiguadas y terminan extinguiéndose



Es posible sostener las oscilaciones electromagnéticas si tenemos un medio de proveer, automatica y periodicamente (una vez en cada ciclo, por ejemplo), desde una fuente externa, energia capaz de compensar la disipada como energía térmica.

Oscilaciones LC: Estudio Cuantitativo

Oscilaciones LC, sin resistencia. La energía total U presente en cualquier instante en el circuito LC oscilante es:

$$U = U_B + U_E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C}$$

Esta ecuación expresa el hecho que, en un instante arbitrario, la energía está almacenada, parte en el campo magnético del inductor (U_B) y parte en el campo eléctrico del condensador (U_E).

Como no hay resistencia en el circuito, no hay trasferencia de energía en forma térmica y U permanece constante con el tiempo, aún cuando *i* y *q* cambien. En un lenguaje mas formal, *dU/dt* debe ser cero. Se tiene que:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C}\right) = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = 0$$

Ahora:

$$\frac{dq}{dt} = i \qquad \text{y} \qquad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

Oscilaciones LC: Estudio Cuantitativo

Sustituyendo:

$$\frac{dq}{dt} = i \quad \text{y} \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \quad \text{en} \quad Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = 0$$

Se reduce a:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0$$

(1) Oscilaciones LC

Solución de la ecuación diferencial:

$$q = Q\cos(\omega t + \phi)$$

(2) carga

donde Q es la amplitud de las variaciones de la carga y ω es la frecuencia angular de las oscilaciones electromagnéticas.

Podemos probar que la ecuación (2) es solución de (1) sustituyendo (2) junto con su segunda derivada en (1).

Oscilaciones LC: Estudio Cuantitativo

Para determinar la derivada segunda:

$$\frac{dq}{dt} = i = -\omega Q sen(\omega t + \phi) \qquad (3)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 Q \cos(\omega t + \phi)$$

Sustituyendo *q* y d^2q/dt^2 en $L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0$ tenemos:

$$-L\omega^2 Q\cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{C}Q\cos(\omega t + \phi) = 0$$

Cancelando $Q\cos(\omega t + \phi)$ y sacando el valor de ω:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

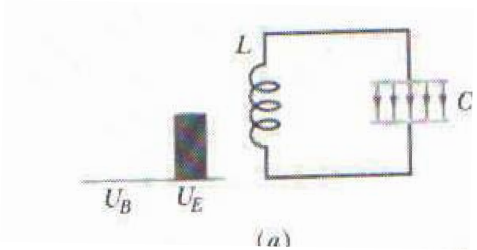
Luego, como obtuvimos para ω el valor constante 1/√LC, se confirma que (2) es solución de (1).

Oscilaciones LC: Estudio Cuantitativo

La constante de fase Φ en la ecuación (2) es determinada por las condiciones existentes en el instante t=0. Haciendose, por ejemplo, Φ = 0 para t=0, la ecuación (2) exige que q=Q y la ecuación (3) exige que i=0. Estas son las condiciones iniciales presentadas en la primera figura (a).

$$q = Q\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{(2) carga}$$

$$\frac{dq}{dt} = i = -\omega Q sen(\omega t + \phi) \qquad (3)$$



La energía eléctrica almacenada en el circuito LC, en un instante cualquier t, de acuerdo con las ecuaciones (2 de la carga) y de la energía $U_E = \dfrac{q^2}{2C}$ es:

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega t + \phi)$$

y la energía magnética, de acuerdo con la ecuación (3) y $U_B = \dfrac{1}{2}Li^2$ es:

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\omega^2 Q^2 sen^2(\omega t + \phi)$$

Oscilaciones LC: Estudio Cuantitativo

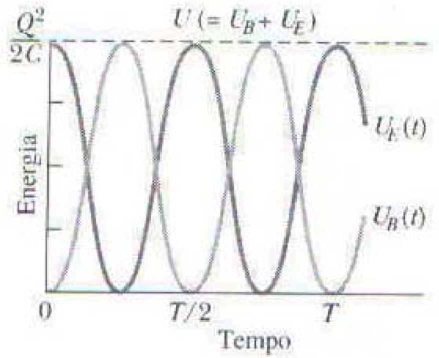
Sustituyendo la expresión de $\omega = 1/\sqrt{LC}$ en

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L\omega^2 Q^2 sen^2(\omega t + \phi)$$

Tenemos:

$$U_B = \frac{Q^2}{2C} sen^2(\omega t + \phi)$$

La figura abajo muestra los gráficos de $U_E(t)$ y $U_B(t)$ para el caso $\Phi = 0$.



Note que:

1. Los valores máximos U_E y U_B son los mismos ($=Q^2/2C$).
2. En un instante cualquier la suma de U_E y U_B es una constante ($=Q^2/2C$).
3. Cuando U_E alcanza su valor máximo, U_B es cero e inversamente.

Oscilaciones amortiguadas en un circuito RLC

Cuando la resistencia R está presente en un circuito LC, la energía electromagnética total U no sigue siendo constante, sino que disminuye con el tiempo a medida que es transformada en energía térmica en el resistor.

Como antes, la energía total es dada por:

$$U = U_B + U_E = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{q^2}{2C} \qquad (4)$$

$$\frac{dU}{dt} = -Ri^2 \qquad (5)$$

El signo negativo significa que la energía almacenada disminuie con el tiempo, siendo convertida en energía térmica a la tasa i^2R.

Derivando (4) y combinando con el resultado de (5), tenemos:

$$\frac{dU}{dt} = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = -Ri^2$$

Oscilaciones amortiguadas en un circuito RLC

$$\frac{dU}{dt} = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = -Ri^2$$

Sustituyendo *i* por *dq/dt* y *di/dt* por *d^2q/dt^2*, despues de partir por *i*, obtenemos:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

(6) Circuito RLC

Esta es la ecuación diferencial que describe las oscilaciones amortiguadas en un circuito RLC. Haciendose R=0, esta ecuación se reduce a la ecuación (1) que es la ecuación diferencial que describe las oscilaciones LC no-amortiguadas.

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (1)$$

Oscilaciones amortiguadas en un circuito RLC

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$ (6) Circuito RLC

La solución general de la ecuación (6) puede ser descrita como:

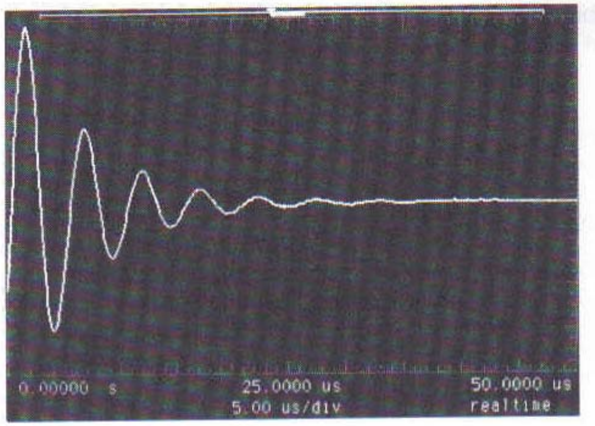
$$q = Qe^{-Rt/2L}\cos(\omega' t + \phi),$$ (7)

En la cual: $$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}$$

Con la frecuencia ω = 1/√LC. La ecuación (7), que puede ser descrita como una función coseno con amplitud exponencialmente descrecente en el tiempo, es la ecuación de la curva de amortiguamento

Oscilaciones amortiguadas en un circuito RLC

$$q = Qe^{-Rt/2L}\cos(\omega' t + \phi), \quad (7)$$



La frecuencia angular ω' es siempre menor que la frecuencia angular ω de las oscilaciones no amortiguadas, pero consideraremos solamente los casos para los cuales la resistencia R sea tan pequeña que podamos hacer ω'= ω sin cometer un error apreciable.

Oscilaciones amortiguadas en un circuito RLC

Si consideramos “E”como la energía total y ΔE la perdida de energía por ciclo, la perdida de energía por ciclo, definimos el “factor de calidad Q* como:

$$Q^* = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$$ Factor de calidad