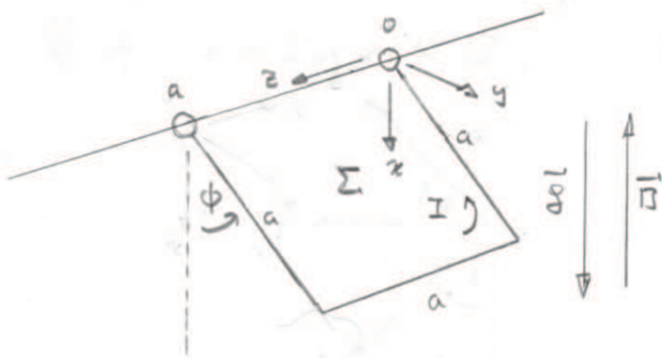


P1



Un péndulo en forma de
cuadrado de lado a ,
resistencia R y masa m
oscila sometido a la
gravedad y un campo
magnético uniforme.

Encontrar la ecuación del
movimiento. Probar que el campo
magnético se comporta como
amortiguador (tres magnéticos)

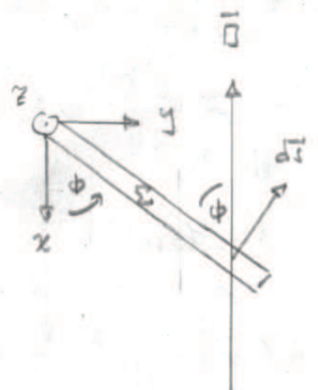
Sol.1 Dos grados de libertad: $\phi(t)$, $I(t)$

Las ecuaciones $\rightarrow$ Las de Fuerzas
 $\rightarrow$ Las de voltajes $\rightarrow$ Ohm
 $\rightarrow$ Faraday

Flujo magnético:

$$\begin{aligned}\Phi_{\Sigma} &= \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} -B \hat{x} \cdot \hat{\phi} ds \\ &= \iint_{\Sigma} B \sin(\phi) ds = a^2 B \sin(\phi) \\ &= a^2 B \sin(\phi(t))\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi_{\Sigma}}{dt} = - a^2 B \dot{\phi} \cos(\phi)$$



Leg de Ohm: $\mathcal{E}_{\partial\Sigma} = IR \Rightarrow I = -\frac{a^2 B}{R} \dot{\phi} \cos(\phi)$

Newton: $\vec{F}_{\text{result}} = m \vec{a}_G$

$$\vec{F}_G = \frac{1}{2} a \hat{\rho} + \frac{1}{2} a \hat{z}$$

$$\vec{v}_G = \frac{1}{2} a \dot{\phi} \hat{\phi}$$

$$\vec{a}_G = \frac{1}{2} a (\ddot{\phi} \hat{\phi} - \dot{\phi}^2 \hat{\rho})$$

Fuerzas:

$$\vec{F}_G = m \vec{g} = mg \hat{x} = mg (\cos(\phi) \hat{\rho} - \sin(\phi) \hat{\phi})$$

$$\vec{F}_m = \int_{\partial\Sigma} I d\vec{r} \times \vec{B}$$

$$= \int_0^a -I dz \hat{z} \times B \hat{y}$$

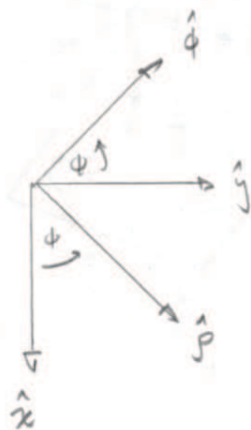
$$= \int_0^a I B \hat{y} dz = I a B \hat{y}$$

$$= -\frac{a^3 B^2}{R} \dot{\phi} \cos(\phi) (\sin(\phi) \hat{\rho} + \cos(\phi) \hat{\phi})$$

Newton:

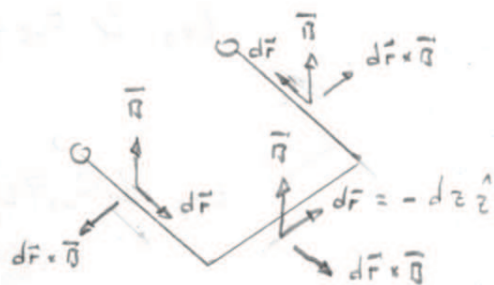
$$\frac{1}{2} m a (\ddot{\phi} \hat{\phi} - \dot{\phi}^2 \hat{\rho}) = (N + mg \cos(\phi) + I a B \sin(\phi)) \hat{\rho} - (mg \sin(\phi) + \frac{a^3 B^2}{R} \dot{\phi} \cos^2(\phi)) \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ddot{\phi}}_{\Omega^2} + 2 \underbrace{\frac{g}{a} \sin(\phi)}_{\omega^2} + 2 \underbrace{\frac{(aB)^2}{mR}}_{\nu} \dot{\phi} \cos^2(\phi) = 0$$



$$\hat{x} = \cos(\phi) \hat{\rho} - \sin(\phi) \hat{\phi}$$

$$\hat{y} = \sin(\phi) \hat{\rho} + \cos(\phi) \hat{\phi}$$



Al final solo basta considerar el lado más alejado del eje de rotación.

Sea $\omega = \dot{\phi}$. Luego, la ecuación se escribe como un sistema de dos ecuaciones de orden 1:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\Omega^2 \sin(\phi) - \nu \omega \cos^2(\phi) \end{aligned} \right\} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi \\ \omega \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \phi \\ \omega \end{pmatrix}$$

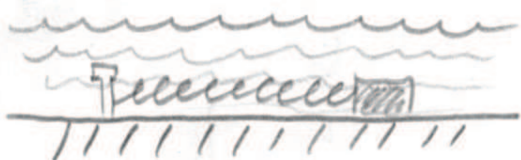
Claramente, $\phi=0, \omega=0$ es un punto de equilibrio. Luego, se linealiza en torno a este:

$$f \begin{pmatrix} \phi \\ \omega \end{pmatrix} \approx \cancel{f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + Df \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\Omega^2 \phi - \nu \omega \end{pmatrix}$$

Linealización:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\Omega^2 \phi - \nu \omega \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} + \nu \dot{\phi} + \Omega^2 \phi = 0 \quad \text{Oscilador armónico amortiguado. //$$



P1

Esfera de radio R con densidad de magnetización uniforme.



Calcular $\vec{A}$, $\vec{J}_m$, $\vec{H}_m$.

Dibujar las líneas de campo magnético.

Sol:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \vec{m}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

$$= \mu_0 \vec{m} \hat{z} \times \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

$\equiv \vec{I}(\vec{r})$: se parece al campo eléctrico de una esfera con carga uniforme.

$$\vec{I}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\vec{r}'}{3} & |\vec{r}| \leq R \\ \frac{R^3}{3} \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}|^3} & |\vec{r}| \geq R \end{cases}$$

$$\hat{z} \times \vec{r} = x\hat{y} - y\hat{x} = r \sin(\theta) \hat{\phi}$$



$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 m}{3} r \sin(\vartheta) \hat{\phi} & r \leq R \\ \frac{\mu_0 m R^2}{3} \frac{\sin(\vartheta)}{r^2} \hat{\phi} & r \geq R \end{cases}$$

$$\vec{J}_r(\vec{r}) = \nabla \times \vec{m} = 0$$

$$\vec{H}_r(\vec{r}) = \vec{m} \times \hat{n} = m \hat{z} \times \hat{r} = m \sin(\vartheta) \hat{\phi}$$

Dentro de la esfera

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{3} \vec{m} \times \vec{r} = \frac{\mu_0}{3} (x\hat{j} - y\hat{i})$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{3} \nabla \times (x\hat{j} - y\hat{i}) =$$

$$= \frac{\mu_0 m}{3} (\partial_x \hat{j} + \partial_y \hat{i}) \times (x\hat{j} - y\hat{i}) = \frac{2}{3} \mu_0 m \hat{z}$$

Es claro que fuera de la esfera,
el campo es igual al de un dipolo
magnético.

