Electromagnetismo
Ejercicio

Prof. C. Romero

4 de Mayo de 2009 Tiempo: 50 min.

P1. Una distribución esférica de carga está dada por

$$\rho = \begin{cases} \rho_0(1 - r^2/a^2) & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases} \tag{1}$$

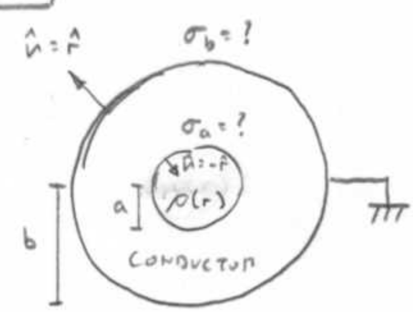
La distribución está rodeada por un casquete conductor conectado a tierra de radio interior $r = a$ y radio exterior $b > a$.

a) Calcule la densidad de carga en todas las superficies del conductor.

b) Calcule el potencial en el centro de la distribución de carga.

c) Encuentre la energía electrostática del sistema.

Solución:



¿Qué sabemos?

- $\vec{E} = \vec{0}$ dentro del conductor
- φ es constante en el conductor e igual en el infinito
- El conductor se carga en sus superficies uniformemente (simetría esférica) de modo que

$$\vec{E}(a\hat{r}) = -\frac{\sigma_a}{\varepsilon_0}\hat{r}, \quad \vec{E}(b\hat{r}) = \frac{\sigma_b}{\varepsilon_0}\hat{r}$$

El potencial satisface la Ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Simetría esférica: $\varphi(\vec{r}) = \varphi(r)$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi = -\frac{d\varphi}{dr}\hat{r}$$

- Caso $r < a$:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^4}{a^2} - r^2\right)$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^5}{5a^2} - \frac{r^3}{3}\right) - C_1$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{5a^2} - \frac{r}{3}\right) - \frac{C_1}{r^2}$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^4}{15a^2} - \frac{r^2}{3}\right) + \frac{C_1}{r} + \varphi_1$$

- Caso $a < r < b$ Análogo:

$$\varphi(r) = \frac{C_2}{r} + \varphi_2$$

- Caso $r > b$ Análogo:

$$\varphi(r) = \frac{C_3}{r} + \varphi_3$$

$C_1, C_2, C_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ por determinar

Condiciones de borde:

- Continuidad: $\varphi(a^-)=\varphi(a^+)$, $\varphi(b^-)=\varphi(b^+)$
- El potencial decae en el infinito: $\varphi(\infty)=0$ (Arbitrario)
- Conexión a tierra: $\varphi(a)=\varphi(b)=0$
- Por simetría esférica, el campo eléctrico es nulo en el centro de la configuración:

$$\frac{d\varphi}{dr}(0)=0 \Rightarrow c_1=0$$

$$\varphi(a^-) = -\frac{7}{60}\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0} + \varphi_1 = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \frac{7}{60}\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(a^+) &= \frac{c_2}{a} + \varphi_2 = 0 \\ \varphi(b^-) &= \frac{c_2}{b} + \varphi_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_2&=0 \\ \varphi_2&=0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(b^+) &= \frac{c_3}{b} + \varphi_3 = 0 \\ \varphi(\infty) &= \varphi_3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_3&=0 \\ \varphi_3&=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r^4-a^4}{20a^2} - \dfrac{r^2-a^2}{6}\right) & r\le a \\ 0 & r\ge a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r}{3} - \dfrac{r^3}{5a^2}\right)\hat{r} & r< a \\ \vec{0} & r> a \end{cases}$$

a) C.B. de conductores $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\hat{n}$

$$\sigma_a = -\varepsilon_0 E(a^-) = -\frac{2}{15}\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_b = \varepsilon_0 E(b^+) = 0$$

b) $\varphi(0) = \varphi_1 = \dfrac{7}{60}\dfrac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}$

c) $U = \dfrac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3} |\vec{E}|^2\, dV$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi} E(r)^2 r^2 \sin(\theta)\, d\phi\, d\theta\, dr$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} 4\pi \int_0^a (rE(r))^2\, dr$$

$$= \frac{2\pi\rho_0^2}{\varepsilon_0}\int_0^a \left(\frac{r^2}{3} - \frac{r^4}{5a^2}\right)^2 dr$$

$$= \frac{2\pi\rho_0^2}{\varepsilon_0}\int_0^a \frac{r^4}{9} + \frac{r^8}{25a^4} - \frac{2r^6}{15a^2}\, dr$$

$$= \frac{2\pi\rho_0^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{a^5}{45} + \frac{a^9}{225a^4} - \frac{2a^7}{105a^2}\right)$$

$$U = \frac{8}{525}\frac{\pi\rho_0^2 a^5}{\varepsilon_0}$$