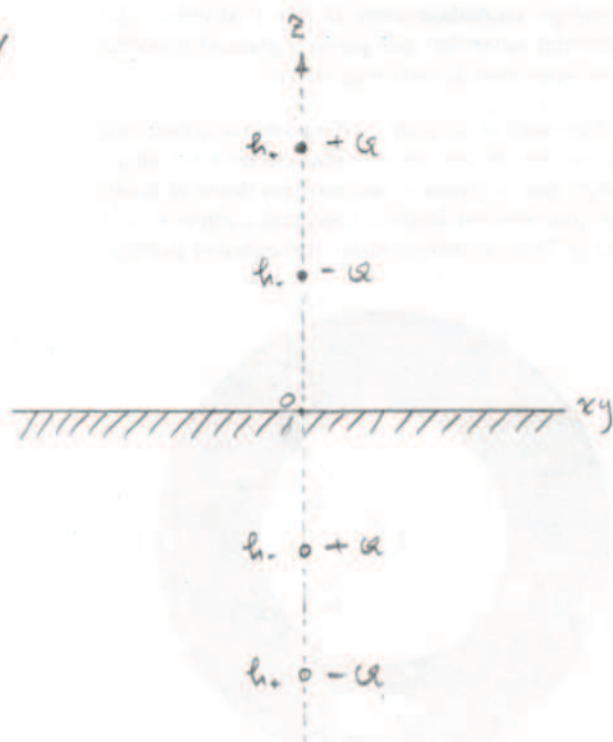


Semestre: Otoño 2022

Profesor: Claudio Romero

Auxiliares: Ignacio Ortega y Tomás Carricajo

Pauta Control N°2

P1/

Usamos el Método de las Imágenes para resolver el problema. La posición y magnitud de las cargas imagen son bastante intuitivos (en la figura se observan, junto con el sistema de referencia escogido). De todos modos, es preciso verificar que la solución propuesta satisface las condiciones de conductores:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - h\hat{z}}{|\vec{r} - h\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r} - 2h\hat{z}}{|\vec{r} - 2h\hat{z}|^3} + \frac{\vec{r} + h\hat{z}}{|\vec{r} + h\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r} + 2h\hat{z}}{|\vec{r} + 2h\hat{z}|^3} \right) & z > 0 \\ \vec{0} & z < 0 \end{cases}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - h\hat{z}|} - \frac{1}{|\vec{r} - 2h\hat{z}|} + \frac{1}{|\vec{r} + h\hat{z}|} - \frac{1}{|\vec{r} + 2h\hat{z}|} \right) & z \geq 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

Notese que este potencial es efectivamente continuo. Además $\varphi \rightarrow 0$ si $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ (en cualquier dirección). Por tanto, el conductor está conectado a tierra.

La condición de borde de conductores también se cumple:

(2)

$$E(x\hat{x} + y\hat{y}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(-\frac{h_+}{\sqrt{x^2 + y^2 + h_+^2}} + \frac{h_-}{\sqrt{x^2 + y^2 + h_-^2}} \right) \hat{z}$$

a) Recordando que $\vec{E} = \frac{\sigma_c}{\epsilon_0} \hat{n}$ en la superficie del conductor, se concluye que la carga del conductor se distribuye de la siguiente forma:

$$\sigma_c(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{h_-}{\sqrt{x^2 + y^2 + h_-^2}} - \frac{h_+}{\sqrt{x^2 + y^2 + h_+^2}} \right)$$

claramente $\sigma_c \rightarrow 0$ si $x \rightarrow \pm a$ o $y \rightarrow \pm a$

Por también se anula si: $\frac{h_+}{\sqrt{x^2 + y^2 + h_+^2}} = \frac{h_-}{\sqrt{x^2 + y^2 + h_-^2}}$

Es decir, si $x^2 + y^2 = (h_+ h_-)^{\frac{2}{3}} (h_+^{\frac{2}{3}} + h_-^{\frac{2}{3}})$

b) Sobre la carga $-Q$ ejercen fuerzas:

- La carga $+Q$
- El conductor (o las cargas imágenes)

$$\begin{aligned} \vec{F}_{-Q} &= -Q \left(\vec{E}_a(\vec{r}_{-Q}) + \vec{E}_c(\vec{r}_{-Q}) \right) = -Q \left(\vec{E}_a + \vec{E}_a^{\text{Im}} + \vec{E}_{-a}^{\text{Im}} \right) \Big|_{\vec{r} = h_- \hat{z}} \\ &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(h_+ - h_-)^2} - \frac{1}{(2h_-)^2} + \frac{1}{(h_+ + h_-)^2} \right) \hat{z} \end{aligned}$$

c) El hecho de que haya cargas puntuales en el problema complica las cosas. Hay que tener en cuenta que ninguna partícula interactúa consigo misma.

Interacciones en este problema:

- La carga $+Q$ con la carga $-Q \rightarrow U_1 = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h_+ - h_-}$

- El conductor con la carga $+Q$

- El conductor con la carga $-Q$

- El conductor consigo mismo

El conductor con el campo eléctrico total

$$U_2 = \iint_{\Pi_{\text{cv}}} \sigma_c \phi_{\text{total}} ds = 0$$

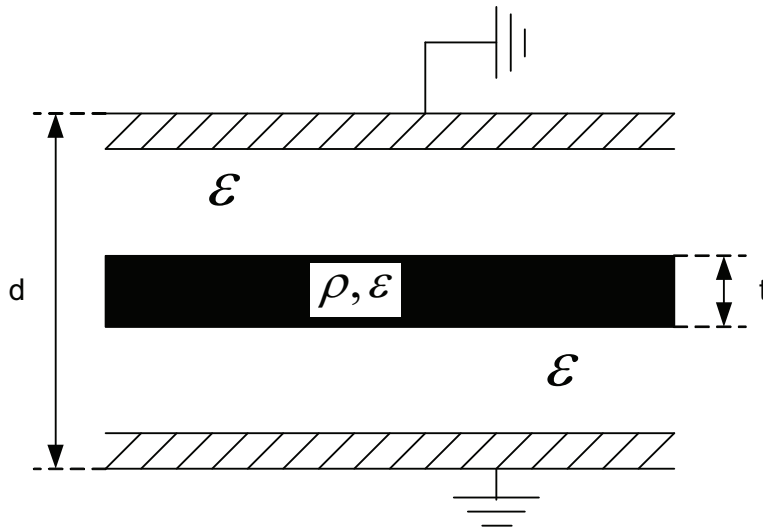
El potencial se anula en la superficie del conductor

Por tanto, la energía de interacción vale:

$$U = U_1 + U_2 = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h_+ - h_-}$$

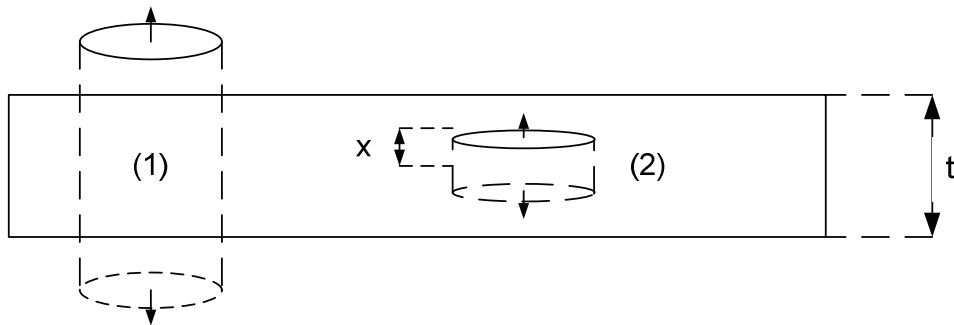

May 21st 2009

Pregunta 2



Para todos los puntos del problema, se necesita E, D y V así que se conseguirán de inmediato.

Primero D haciendo un gauss con un cilindro y suponiendo que el problema es simétrico sobre y bajo un plano situado en el centro del plano de carga.



$$(1) \oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \Rightarrow DA + DA = \rho t A \Rightarrow D = \frac{\rho t}{2}$$

$$(2) \oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \Rightarrow DA + DA = \rho 2x A \Rightarrow D = \rho x$$

Nota: x se puede tomar de arriba hasta abajo.

$$x \geq \frac{t}{2} \mid \vec{D} = \frac{\rho t}{2} \hat{i}; \vec{E} = \frac{\rho t}{2\epsilon} \hat{i}$$

$$x \leq \frac{t}{2} \mid \vec{D} = \rho x \hat{i}; \vec{E} = \frac{\rho x}{\epsilon} \hat{i}$$

Para V, separamos; el caso 1 el potencial en la zona con carga; caso 2 el potencial fuera de la zona con carga. El potencial 0 puede ser tomado desde cualquier plano, se tomará desde el centro para simplificar cálculos.

$$(1) x \leq \frac{t}{2} \mid V = - \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^x E dl = - \int_0^x \frac{\rho x}{\epsilon} dx = - \frac{\rho x^2}{2\epsilon}$$

$$(2) x \geq \frac{t}{2} \mid V = - \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^x E dl = - \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\rho x}{\epsilon} dx - \int_{\frac{t}{2}}^x \frac{\rho t}{2\epsilon} dx$$

$$\Rightarrow - \frac{\rho t^2}{8\epsilon} - \frac{\rho t x}{2\epsilon} + \frac{\rho t^2}{4\epsilon} = \frac{\rho t}{2\epsilon} \left(\frac{t}{4} - x \right)$$

$$x \geq \frac{t}{2} \mid V = - \frac{\rho t}{2\epsilon} \left(\frac{3t}{4} + x \right)$$

$$a) \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) \vec{D}$$

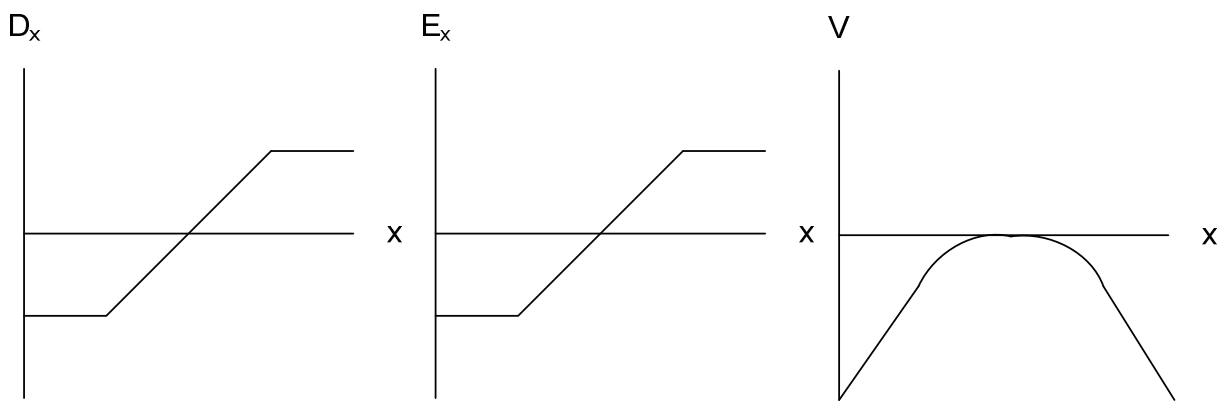
$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1 \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1 \right) \rho_l$$

$$x \leq \frac{t}{2} \mid \rho_P = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1 \right) \rho$$

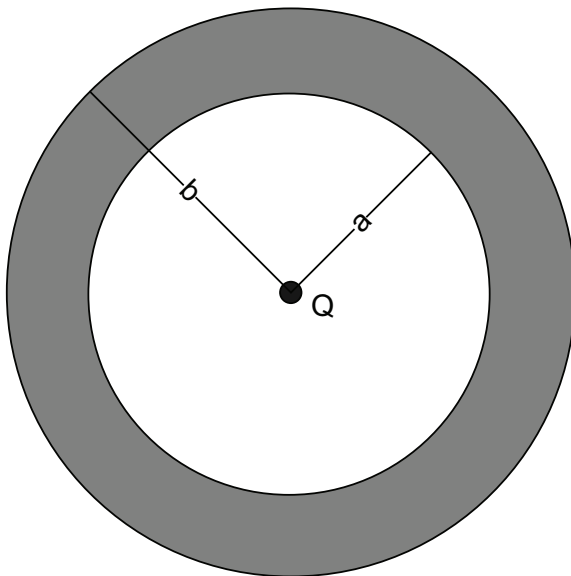
$$b) \uparrow \sigma_p = \hat{n} \cdot \vec{P}(d/2) = (1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}) \hat{n} \cdot \vec{D}(d/2) = (1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}) \frac{\rho t}{2}$$

$$\downarrow \sigma_p = \hat{n} \cdot \vec{P}(-d/2) = (1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}) \hat{n} \cdot \vec{D}(-d/2) = (\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1) \frac{\rho t}{2}$$

c)



Pregunta 3



El problema se puede hacer considerando que la carga esta en infinito y se trajo al centro del casquete esférico o que el casquete se trajo a la carga desde el infinito.

Como E es conservativo, basta con tomar un delta U (U final menos U inicial). U se puede calcular usando la energía del sistema con E y D o con V y Q.

$$\Delta U =$$

$$\frac{1}{2} \iiint \vec{E}_f \cdot \vec{D}_f dV - \frac{\epsilon_0}{2} \iiint |E_i|^2 dV = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) \frac{4\pi Q^2}{16\pi^2} \int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) \frac{Q^2}{8\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$-\frac{1}{2} Q \int_{\infty}^0 \vec{E}_f \cdot d\vec{l} + \frac{1}{2} Q \int_{\infty}^0 \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) \frac{Q^2}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

$$== \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) \frac{Q^2}{8\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Los cálculos anteriores son considerando que la esfera se acerca a la carga, si se hace al revés hay que restar el campo eléctrico de la carga con el campo eléctrico dentro del material. Se llega al mismo resultado.