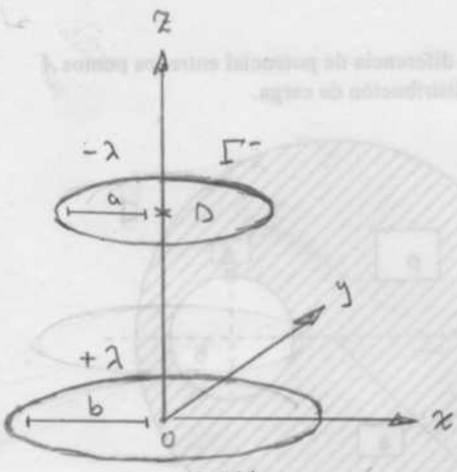
① FI2002-4 ELECTROMAGNETISMO

SEMESTRE: Otoño 2009

PROFESOR: Claudio Romero

AUXILIARES: Ignacio Ortega, Tomás Carricajo.

Pauta Control 1, Problema 2



a) Potencial de una distribución unidimensional de carga

$$\varphi(\vec{r}) = \int_\Gamma \frac{\lambda(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dr'$$

Principio de Superposición

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi^+(\vec{r}) + \varphi^-(\vec{r})$$

Nos interesa $\vec{r} = z\hat{z}$

$\vec{r}' = b\hat{\rho}(\phi)$

$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{z^2+b^2}$

$dr' = b\,d\phi'$

$$\varphi^+(z\hat{z}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Gamma^+} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dr'$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{b}{\sqrt{z^2+b^2}} d\phi$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2\pi b}{\sqrt{z^2+b^2}} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{b}{\sqrt{z^2+b^2}} \quad //$$

El cálculo de φ^- es análogo, sólo que $\vec{r}' = b\hat{\rho}(\phi) + D\hat{z}$

$$\varphi^-(z\hat{z}) = -\frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{a}{\sqrt{(z-D)^2+a^2}} \quad //$$

Sumando, $$\varphi(z\hat{z}) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(\frac{b}{\sqrt{z^2+b^2}} - \frac{a}{\sqrt{(z-D)^2+a^2}} \right) \quad //$$

2.0 ptos.

② b)

$$\Delta\varphi = \varphi(D\hat{z}) - \varphi(\vec{0})$$

$$= \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(\frac{b}{\sqrt{D^2+b^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2}}\right) - \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2}} - \frac{a}{\sqrt{D^2+a^2}}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(\frac{a}{\sqrt{D^2+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{D^2+b^2}} - 2\right)$$

2.0 ptos

c) Campo Eléctrico: $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi$

Si bien no se tiene la función $\varphi(\vec{r})$ en todo el espacio, se puede confiar en que es continua y derivable, salvo en los anillos Γ^+ y Γ^-, donde diverge.

Entonces, la función $\vec{E}(\vec{r})$ está bien definida en todo el eje z. Siendo $\vec{E}(z\hat{z})$ una derivada —y por tanto un límite— bien definida, esto quiere decir que no importa cómo $\vec{r}'$ converge a $z\hat{z}$. Así pues, en particular se el camino de convergencia a lo largo del eje z: $\vec{r}' = z'\hat{z}$, $z' \to z$

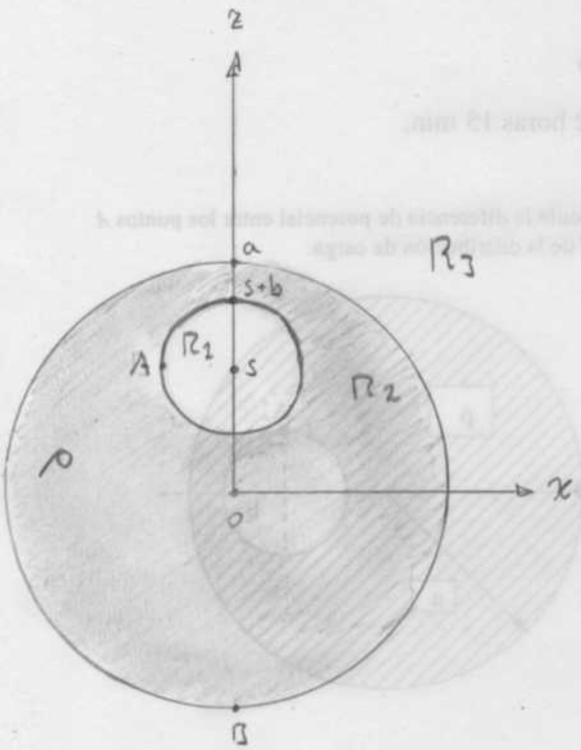
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{d\varphi(z\hat{z})}{dz}\hat{z} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(\frac{bz}{\sqrt{z^2+b^2}^{\,3}} - \frac{a(z-D)}{\sqrt{(z-D)^2+a^2}^{\,3}}\right)\hat{z}$$

2.0 ptos

① FI2002-4 ELECTROMAGNETISMO Semestre 2009/1

PROFESOR: Claudio Romero AUXILIARES: I. Ortega, T. Carricajo

Pauta Control 1, Problema 3



a) Escogemos el sistema de referencia como muestra la figura.

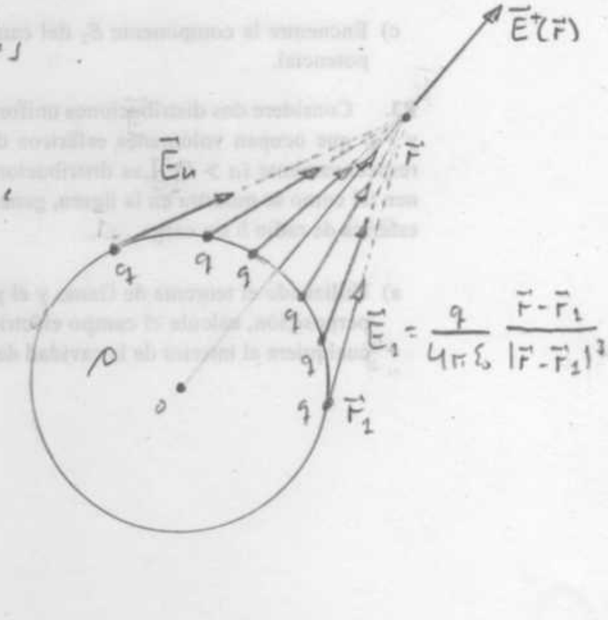
Podemos suponer que tenemos dos esferas macizas: una con radio a, densidad de carga ρ y centrada en el origen; y la otra con radio $b < a$, densidad de carga $-\rho$ y centrada en el punto $\vec{r}_s = s\hat{z}$.

Sean $\vec{E}^+$ y $\vec{E}^-$ los campos generados por las respectivas esferas.

Principio de superposición: $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^+(\vec{r}) + \vec{E}^-(\vec{r})$

Calculemos $\vec{E}^+$ usando la Ley de Gauss: $\oiint_S \vec{E}^+ d\vec{S} = \frac{Q_S}{\varepsilon_0}$

Claramente el sistema goza de simetría esférica. Si consideramos los campos producidos por todos los partículas de la esfera sobre un punto $\vec{r}$ y aplicamos suma vectorial, podemos inferir que $\vec{E}^+$ tiene la forma:



$$\vec{E}^+(\vec{r}) = E^+(r)\hat{r}$$

② Sea S superficie esférica de radio r centrada en el origen

En general: $\oint\!\!\oint_S \vec{E}^+ \cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} E(r)\hat{r} \cdot r^2 \sin(\theta)\hat{r}\, d\phi\, d\theta$

$= r^2 E^+(r) \cdot \int_0^{\pi} \sin(\theta)\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi r^2 E^+(r)$

La carga encerrada dentro de S depende de si S envuelve a la esfera cargada o al revés

- Caso $r > a$: $Q_S = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$

Gauss: $4\pi r^2 E^+(r) = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho / \varepsilon_0 \iff E^+(r) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \Rightarrow \vec{E}^+(\vec{r}) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$

- Caso $r < a$: $Q_S = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

Gauss: $4\pi r^2 E^+(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho / \varepsilon_0 \iff E^+(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \Rightarrow \vec{E}^+(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\hat{r}$

$$\vec{E}^+(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} & |\vec{r}| \le a \quad \text{(Dentro de la esfera: } R_1, R_2) \\ \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} & |\vec{r}| \ge a \quad \text{(Fuera de la esfera: } R_3) \end{cases}$$

El cálculo de $\vec{E}^-$ es análogo. Se escoge un sistema de referencia distinto, con ejes x', y', z' paralelos a x, y, z; y cuyo origen está ubicado en el centro de la cavidad (esfera con carga $-\rho$). Luego, $\vec{r} = \vec{r}_s + \vec{r}' = s\hat{z} + \vec{r}' \Rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - s\hat{z}$. En este sistema de referencia se infiere la simetría $\vec{E}^- = E(r')\hat{r}'$, se aplica la ley de Gauss y se expresan los resultados en función de $\vec{r}$

(1)

$$\vec{E}^-(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r} - s\hat{z}) & \text{Dentro de la esfera: } R_1 \\[2ex] -\dfrac{\rho b^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r} - s\hat{z}}{|\vec{r} - s\hat{z}|^3} & \text{Fuera de la esfera: } R_2, R_3 \end{cases}$$

(Considérese las regiones R_1, R_2, R_3 definidas en la primera figura)

Se suman entonces los campos, $\vec{E}^+$ y $\vec{E}^-$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho s}{3\varepsilon_0}\hat{z} & \vec{r} \in R_1 \\[2ex] \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\vec{r} - b^3\dfrac{\vec{r} - s\hat{z}}{|\vec{r} - s\hat{z}|^3}\right) & \vec{r} \in R_2 \\[2ex] \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(a^3\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} - b^3\dfrac{\vec{r} - s\hat{z}}{|\vec{r} - s\hat{z}|^3}\right) & \vec{r} \in R_3 \end{cases}$$

Sorprendentemente, el campo eléctrico dentro de la cavidad es uniforme en magnitud, dirección y sentido. 3.0 ptos

④ b) Potencial Electrostático: buscamos una función $\varphi(\bar{r})$ continua y convergente a cero en el infinito, tal que $\vec{E} = -\nabla \varphi$.

Conocemos bien el potencial de campo de una carga puntual.
También es sabido que $\nabla(|\bar{r}|^2) = 2\bar{r}$ y $\nabla z = \hat{z}$
Usamos esto para escribir el potencial que buscamos:

$$\varphi(\bar{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho s}{3\varepsilon_0} z + \varphi_1 & \bar{r} \in R_1 \\[2ex] -\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\dfrac{|\bar{r}|^2}{2} + \dfrac{b^3}{|\bar{r} - s\hat{z}|}\right) + \varphi_2 & \bar{r} \in R_2 \\[2ex] \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\dfrac{a^3}{|\bar{r}|} - \dfrac{b^3}{|\bar{r} - s\hat{z}|}\right) & \bar{r} \in R_3 \end{cases}$$

φ_2, φ_2 son constantes tales que $\varphi(\bar{r})$ es función continua
Por esta vez no hay necesidad de determinarlos, ya que la expresión para R_2 basta para encontrar la diferencia de potencial entre A y B:

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = \varphi(-a\hat{z}) - \varphi(-b\hat{x} + s\hat{z})$$

$$= \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^3}{a+s}\right) - \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{b^2+s^2}{2} + \frac{b^3}{b}\right)$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3b^2+s^2-a^2}{2} - \frac{b^3}{a+s}\right)$$