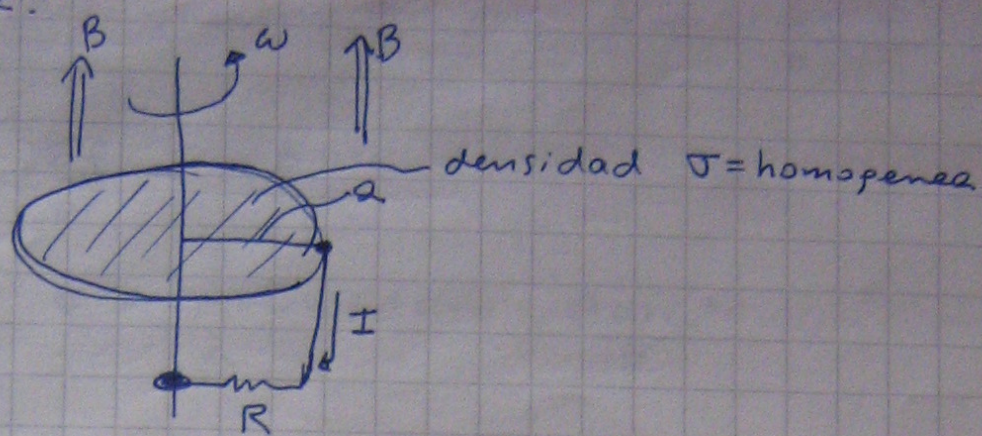
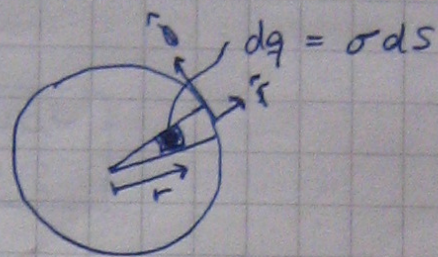




a)  $I$ ?



la velocidad del elemento de carga es

$$\vec{v}(dq) = r\omega \hat{\phi}$$

luego  $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$

$$\Rightarrow F = dq \vec{v} \wedge B \hat{z}$$

$$= \sigma ds \cdot (r\omega \hat{\phi} \wedge B \hat{z}) = \sigma ds r \omega B \hat{r}$$

luego esta fuerza sobre el elemento de carga genera un potencial electrostático.

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = q(-\nabla \varphi)$$

$$= -q \nabla \varphi$$

En este caso  $F = ds \sigma \cdot (-\nabla \varphi)$

Igualando ambas expresiones de  $F$  sobre  $dq$ :

$$+\sigma ds \nabla \varphi = -\sigma ds r \omega B \hat{r}$$

$$\boxed{\nabla \varphi = -B \omega r \hat{r}}$$

En este caso es claro ver que  $\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \hat{r}$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -B\omega r$$

$$\varphi = \int_a^0 -B\omega r dr = \frac{B\omega a^2}{2}$$

luego la corriente es trivialmente

$$I = V/R$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{B\omega a^2}{2R}}$$

Al incrementar el radio al doble

$$\tilde{I} = \frac{B\omega 4a^2}{2R} = 4 \frac{B\omega a^2}{2R} = 4I$$

R: Se cuadruplica.

Si deberá fluir corriente, pues el sistema sigue siendo el mismo, por lo tanto no puede experimentar un comportamiento diferente. Es decir, no puede depender de cómo es observado.

## Control II Eléctromagnetismo FI33A-2007-01

Prof. Marcel G. Clerc  
Auxiliare: Rodrigo Navarro & Juan Ignacio Piwonka  
Tiempo: 3:00 Hrs.

PACS numbers:

**1) Filamento en un dieléctrico:** Un filamento infinito (alambre) con densidad de carga  $\lambda$  es colocado al interior de un medio dieléctrico homogéneo e isotrópico, caracterizado por una constante dieléctrica  $\epsilon$ .

Considere que el medio dieléctrico es infinito, pero en los bordes lateral e inferior del dieléctrico se coloca lamina conductora (película delgada de conductor ideal) como se ilustra en la figura. El filamento se encuentra a una distancia  $a$  con respecto a cada conductor (ver figura).

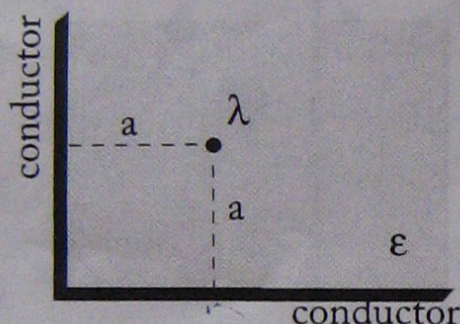


FIG. 1: Medio dieléctrico.

a) Encuentre en el dieléctrico el vector desplazamiento, polarización y el campo eléctrico.

b) Calcule la densidad de polarización superficial y volumétrica.

**2) Inducción de corriente a campo magnético constante:** Un disco metálico de radio  $a$  gira con velocidad angular  $\omega$  con respecto al eje vertical el cual está cargado homogéneamente, a través del cual pasa un campo magnético  $B$  constante. Se conecta un circuito eléctrico de resistencia  $R$  al centro del disco y a un borde de este de manera que siempre está en contacto pero el disco puede deslizar (ver figura), desprecie los efectos de la fricción en este punto de contacto.

a) Encuentre la corriente  $I$  que atraviesa la resistencia.

b) En caso que se aumente el radio en un factor 2, cómo cambia la corriente.

c) En caso que uno considere el sistema de referencia del disco, es decir, el disco quieto y campo magnético rotatorio, ¿fluirá corriente?, justifique claramente sus argumentos.

**3) Cable coaxial** Se tiene un cable coaxial ideal de simetría cilíndrica que consta de un conductor cilíndrico

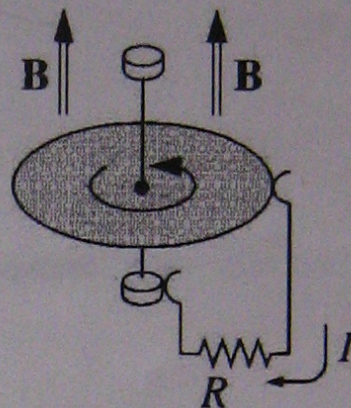


FIG. 2: Generador de corriente.

macizo de radio  $a$  rodeado por un conductor cilíndrico hueco de radio interior  $b$  y radio exterior  $c = 3a$ . Por el cilindro central pasa una densidad de corriente uniforme  $\vec{J}_1 = J_0 \hat{k}$  ( $\hat{k}$  dirección acimutal) y por el cilindro hueco circula una densidad de corriente en sentido opuesto,  $\vec{J}_2 = -J_0/5 \hat{k}$  (ver figura).

Determine el campo magnético en todas partes y calcule qué valor debe tener  $b$  para que el campo magnético en la zona exterior ( $\rho > c$ , donde  $\rho$  es la distancia radial medida desde el eje vertical central) sea nulo.

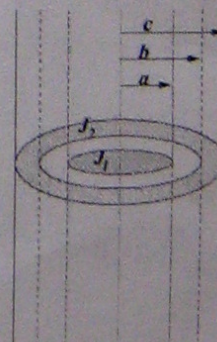


FIG. 3: Cable coaxial.

Resumen de Corriente Eléctrica: omitimos los desarrollos  
 pues están en el apunte correspondiente.

$$I \equiv \frac{dq}{dt}$$

Consideremos un conductor con  $i$  tipos de portadores  
 de carga  $q_i$

$$N_i = \frac{\# q_i}{V} = \text{densidad de portadores de carga } q_i$$

entonces

$$dI = \left[ \sum_i N_i q_i \vec{v}_i \right] \hat{n} dS$$

Definimos la densidad de corriente

$$\vec{J} = \sum_i N_i q_i \vec{v}_i$$

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{dQ}{dt}$$

Ecuación de Continuidad

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = - \int_V \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

normal interior puesto  
 que es la corriente  
 que entra

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \right]$$

ECC. de Continuidad

- Ley de Ohm:

$\sigma$  encuentra que

$$\vec{J} = \sigma(E) \vec{E}$$

$\sigma$ : Conductividad

el material es ohmico  $\sigma(\vec{E}) = \sigma$

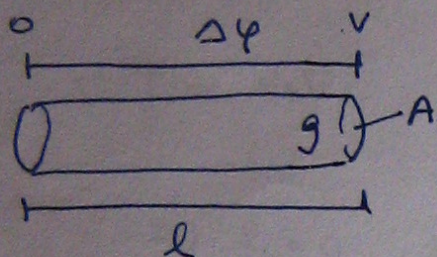
$$\Rightarrow \boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}} \quad \text{esta es la ley de Ohm}$$

Definimos la resistividad como

$$\boxed{\eta = \frac{1}{\sigma}} \quad [\eta] = \Omega m$$

$$\Rightarrow \eta \vec{J} = \vec{E}$$

Consideremos un cable conductor



$$\Delta\varphi(r) = - \int_l^0 \vec{E} d\vec{l}$$

$$\text{Sabemos que } \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \text{y } \varphi = \varphi(x)$$

luego para que la corriente vaya en el sentido de la diferencia de potencial

$$\left. \begin{array}{l} E(x) \hat{x} \\ V = \tilde{E} l \end{array} \right\} \text{ si } J \text{ es de } \Rightarrow \tilde{E} = E$$

$$V = \frac{J}{\sigma} l = \eta l J$$

$$I = \int J dS = JA \Rightarrow J = \frac{I}{A}$$

$$\text{luego } \boxed{R \equiv \frac{\eta l}{A}} \quad \text{y finalmente tenemos}$$

$$\boxed{V = \eta l J = \frac{\eta l}{A} I = RI} \quad \text{Ley de Ohm macroscópica}$$

Corriente estacionaria:

Consideremos un conductor en estado estacionario

$$\Rightarrow \rho = \rho(r) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$\Rightarrow$  la ecuación de continuidad toma la forma

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Si el medio cumple la ley de Ohm

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

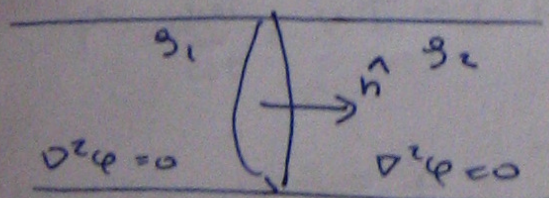
$$\nabla \cdot \vec{J} = \sigma \nabla \cdot \vec{E} = \sigma \frac{\rho_L}{\epsilon} = 0$$

$\Rightarrow \rho_L = 0$  dentro del conductor

$\Rightarrow$  movimiento de cargas en estado estacionario sucede solo en la superficie.

$$\text{y} \quad \boxed{\nabla^2 \phi = 0}$$

- Condiciones de Borde:



Por continuidad del flujo  
y Conservatividad del  
campo Electrico

las condiciones en la  
interfase son:

$$\boxed{J_{1n} = J_{2n}}$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}}$$

$$\text{y} \quad \boxed{E_{1t} = E_{2t}}$$

Fase Transiente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (g \vec{E}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + g \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + g \frac{\rho_e}{\epsilon} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_e(r, t) = \rho(r, 0) e^{-\frac{g}{\epsilon} t}}$$

Definimos un tiempo característico

$$\tau_c = \frac{\epsilon}{g}$$

- Trabajo de la corriente por una resistencia:

$$dw = dq \varphi = dq V = I V dt$$

$$P = \frac{dw}{dt} = V \cdot I = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (\text{Effect Joule})$$

$$\star \text{ Definición de } R \equiv \frac{V}{I} = \frac{-\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}}{\int \vec{J} \cdot d\vec{S}}$$

- Ley de Kirchhoff:

$$R_T = R_1 + R_2 \quad (\text{serie})$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (\text{paralelo})$$

$$\boxed{\sum_{i \in \text{camino cerrado}} V_i = 0}$$
$$\nabla \wedge \vec{E} = 0$$

$$\boxed{\sum_{i \in \text{c.c.c.}} I_i = 0}$$
$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

# Magnetostática

Experimentalmente se encuentran que para una carga  $q'$  en la posición  $\vec{r}'$  que se mueve con velocidad  $\vec{v}'$  el campo magnético que experimenta es:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q' \frac{\vec{v}' \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

y también que la fuerza sobre una carga  $(q, \vec{r}, \vec{v})$

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_M.$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{r}) \quad \text{F. de Lorentz.}$$

$$\vec{F}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} q\vec{v} \wedge q'\vec{v}' \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

También se encuentra que  $\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2$

- la fuerza magnética no hace trabajo

$$\begin{aligned} dW &= -\vec{F}_M \cdot d\vec{r} = -F_M \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \\ &= -F_M \cdot \vec{v} \cdot dt \\ &= -dt \, q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \end{aligned}$$

luego  $\vec{F} \perp \vec{v}$ .

⚡ Fuerza sobre un circuito dado un  $\vec{B}$

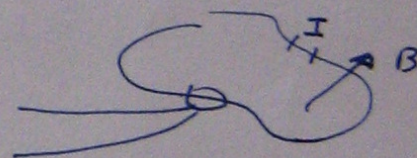
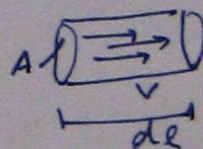
$$d\vec{F} = N q A d\vec{l} \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$

como  $d\vec{l} \parallel \vec{v}$

$$d\vec{l} \cdot \vec{v} = d\vec{l} \cdot \vec{v}$$

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= N q A v \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B} \\ &= \underbrace{N q v}_{I} dS \hat{n} d\vec{l} \wedge \vec{B} \\ &= \underbrace{I}_{I} d\vec{l} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

$$\vec{F} = \oint I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

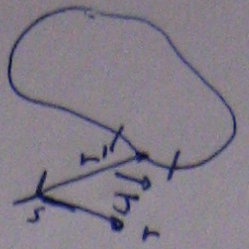


de Biot-Savart: Dado  $\vec{J}$  calculamos  $\vec{B}$  enpeñado

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} N q d\vec{s} d\vec{\ell} \vec{v} \wedge \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} N q \underbrace{\vec{v} \cdot d\vec{s}}_{\vec{J} \cdot d\vec{s}} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}') \wedge \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} dV'$$



$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \wedge \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} dV$$

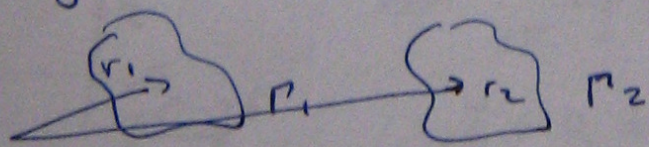
En el caso de un circuito.  $I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$   
 $dI = \vec{J} \cdot d\vec{S}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \wedge \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} d\vec{S} \cdot d\vec{\ell}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \int_V \underbrace{d\vec{S} \cdot \vec{J}(\vec{r}')}_{dI} \wedge \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} d\vec{\ell}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} I d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}$$

\* Fuerza entre circuitos

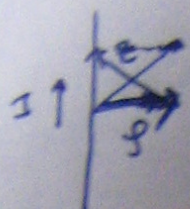


$$F = \oint_{\Gamma_1} I_1 d\vec{\ell}_1 \wedge \vec{B}$$

$$= \oint_{\Gamma_1} I_1 d\vec{\ell}_1 \wedge \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} I_2 d\vec{\ell}_2 \wedge \frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{\|\vec{r}_1-\vec{r}_2\|^3}$$

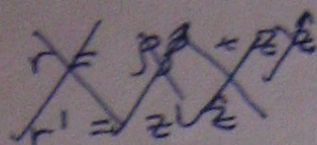
$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} I_1 I_2 d\vec{\ell}_1 \wedge d\vec{\ell}_2 \wedge \frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{\|\vec{r}_1-\vec{r}_2\|^3}$$

ejemplo:



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\vec{l} \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}$$

$$d\vec{l} = dz \hat{z}$$

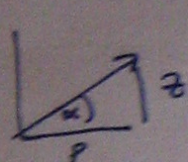


$$\begin{cases} \mathbf{r} = p\hat{p} \\ \mathbf{r}' = z\hat{z} \end{cases} \quad \left| \mathbf{r} - \mathbf{r}' \right| = \sqrt{p^2 + z^2}$$

se integra entre  $z \in [-\infty, \infty]$

con el cambio  $z = p \tan \alpha$

$z = p \cot \alpha \rightarrow \alpha \in (0, \pi)$  ó  $\left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$



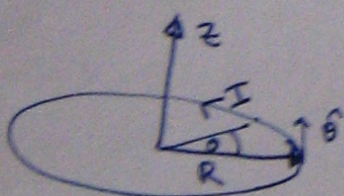
$z = p \cot \alpha \dots$

el cambio

$$\begin{aligned} z &= p \cot \alpha \\ dz &= -p \csc^2 \alpha d\alpha \end{aligned} \quad \text{entre } (0, \pi)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi p} \hat{\phi}$$

Otro ejemplo



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\vec{l} \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}$$

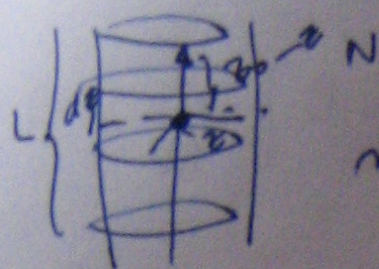
$$d\vec{l} = R d\theta \hat{\theta}$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = z\hat{z} - R\hat{p}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} R d\theta \hat{\theta} \wedge \frac{(z\hat{z} - R\hat{p})}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Solusi de

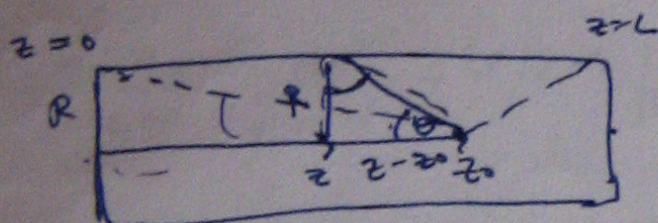


$$n = \frac{N}{L}$$

$$dB = \frac{\mu_0 \tilde{I}}{2} \frac{R^2}{((z_0 - z)^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$\tilde{I} = \frac{N}{L} dz I$$

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2L} \int \frac{dz R^2 \hat{z}}{((z_0 - z)^2 + R^2)^{3/2}}$$



$$z_0 - z = R \cot \theta$$

$$dz = -R \csc^2 \theta d\theta$$

la integral region er sencilla y.

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2L} \hat{z} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

se puede  
obtener  
geométricamente.