se tiene que:

$$m(2\dot{r}\dot{\phi} \sin \alpha + r\ddot{\phi} \sin \alpha) = 0$$

pero m y $\sin \alpha$ son constantes distintas de cero, entonces

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0$$

pero

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi} = r(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})$$

y lo que esta dentro del parentesis es la segunda ecuación. Luego

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi})$$

pero $2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0$, entonces

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0 \Rightarrow r^2\dot{\phi} = cte$$