Pauta Clase Auxiliar FI2001 Mecánica

Profesor: Luis Rodriguez

Auxiliares: Francisco Sepúlveda & Kim Hauser

24/Abril/2009

P1. Usando un D.C.L. se puede determinar que la segunda ley de Newton en cada coordenada entregan las ecuaciones:

$$\hat{i} : -\mu N - k(\sqrt{x^2 + L_0^2} - L_0)\frac{x}{\sqrt{x^2 + L_0^2}} = m\ddot{x}$$

$$\hat{j} : k(\sqrt{x^2 + L_0^2} - L_0)\frac{L_0}{\sqrt{x^2 + L_0^2}} + N - mg = m\ddot{y}$$

inicialmente el movimiento es horizontal, i.e., $\ddot{y} = 0$. Luego, de las ecuaciones de Newton se desprende que:

$$kL_0(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + L_0^2}}) + N - mg = 0$$

$$\Rightarrow N = -kL_0(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + L_0^2}}) + mg$$

usando la relacion $kL_0 = mg$, se tiene que

$$N = \frac{kL_0^2}{\sqrt{x^2 + L_0^2}} > 0 \Rightarrow N > 0$$

por lo que se tiene que, efectivamente, la partícula se mantiene en la superficie.

b) La expresión de la energía esta dada por

$$E = \frac{m}{2}v^2 + \frac{k}{2}\delta^2$$

energía inicial

$$E_i = \frac{m}{2}v_0^2$$

para la energía final, recordemos que $\theta = \pi/4$, por lo que se tiene que

$$\cos(\theta = \pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{L_0}{(L_0 + \delta)}$$

$$\Rightarrow \delta = L_0(\sqrt{2} - 1)$$

por lo tanto se tiene para la energía final

$$E_f = \frac{k}{2}\delta^2 = \frac{k}{2}L_0^2(\sqrt{2} - 1)^2$$

luego, el cambio de energía mecánica es

$$\triangle E = \frac{k}{2}L_0^2(\sqrt{2} - 1)^2 - \frac{m}{2}v_0^2$$

c)para calcular μ, se usa el teorema del trabajo y la energía.
El trabajo reaizado por la fuerza de roce es

$$W_{roce} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{x(\theta=\pi/4)} (-\mu N) dx$$

de las ecuaciones de Newton:

$$N = -kL_0(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + L_0^2}}) + mg$$

ademas

$$\tan(\pi/4) = 1 = \frac{x}{L_0} \Rightarrow x(\theta = \pi/4) = L_0$$

por lo tanto el trabajo realizado por la uerza de roce es

$$W_{roce} = -\mu \int_0^{L_0} (\frac{kL_0^2}{\sqrt{x^2 + L_0^2}}) dx = -\mu k L_0 \int_0^{L_0} \frac{dx}{\sqrt{1 + (\frac{x}{L_0})^2}}$$

para esta integral se hace el cambio de variable $x = L_0 u$

$$\int_0^{L_0} \frac{dx}{\sqrt{1 + (\frac{x}{L_0})^2}} = L_0 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = L_0 \sinh^{-1}(u)|_0^1 = L_0 \sinh^{-1}(1)$$

por lo que se tiene

$$W_{roce} = -\mu k L_0 \int_0^{L_0} \frac{dx}{\sqrt{1 + (\frac{x}{L_0})^2}} = -\mu k L_0^2 \sinh^{-1}(1)$$

usando el teorema del trabajo y la energía

$$-\mu k L_0^2 \sinh^{-1}(1) = \frac{k}{2} L_0^2 (\sqrt{2} - 1)^2 - \frac{m}{2} v_0^2$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{kL_0^2 \sinh^{-1}(1)} [\frac{m}{2} v_0^2 - \frac{k}{2} L_0^2 (\sqrt{2} - 1)^2] = \frac{m v_0^2 - k L_0^2 (\sqrt{2} - 1)^2}{2k L_0^2 \sinh^{-1}(1)}$$